シュプリンガー数学クラシックス　第4巻

D.ヒルベルト／P.ベルナイス［著］
吉田 夏彦／渕野 昌［訳］

数学の基礎

丸善出版

Translation from the German language editions:
Grundlagen der Mathematik I and II by Hilbert and Bernays

はしがき

—Grundlagen der Mathematik I にヒルベルトが寄せた序文

数学の基礎に関する私の研究の主導的な思想は，1917 年以来ベルナイス (P. BERNAYS) との再度にわたる検討ののち書き下して，すでにいろいろな場所で詳しく論じたが，これは，それより前に得られていた構想に基づいているものである．

あとに，この研究には，アッカーマン (W. ACKERMANN) も参加しているが，それ以外にも多くの数学者がかかわっている．

ここに，第 1 巻として上梓された，ベルナイスにより起草され，さらに書き進められる予定であるこの教程の目的は，現在における研究結果によるこの理論の記述にある．

これらの研究結果の状況は，我々の普通に使っている数学の手法が全体として無矛盾であることを示すための，証明論の個々の研究の将来の方向を示唆するものでもある．

この目標に関連して，ゲーデル (K. GÖDEL) の幾つかの新しい結果により，私の証明論の実行不可能性が帰結されるという，最近聞かれる意見は間違っている，ということを強調しておきたい．実際，この結果は，無矛盾性証明をさらに押し進めるためには，有限の立場を，初等的体系の考察において用いられたものより，より強力なものとしなければならない，ということを示しているにすぎないのである．

1934 年 3 月ゲッティンゲンにて

D. ヒルベルト

目　次

第1章　公理論の無矛盾性の問題を論理的な決定問題として扱うこと

数学の基礎の研究での我々の立場は，次の3つの研究の成果のうえに立っていることを特色とする．

1. 特に幾何学基礎論に負うところの多い，公理的方法の形成．

2. 量の理論を，数と数の集合との理論に還元することによって行われた解析学の，現代の厳密な方法による基礎づけ．

3. 整数論ならびに集合論の基礎づけの研究．

このようにして達成された立場に，さらに厳密な方法論的な要求のもとに，新しい問題が課せられた．この問題を解くには，無限の問題を新しい角度から扱うことが必要になる．我々は，公理論を考察することから，この新しい問題設定に向かうことにする．

“公理的” という用語は，時には広い意味で，時には狭い意味で使われる．最も広い意味では，次のような理論展開を公理的と呼ぶ．すなわち，根本概念や根本前提が先頭におかれてあり，理論の内容が，この2種類のものから，定義や証明を使って，論理的に導き出されるような理論展開である．この意味では，ユークリッドの幾何学や，ニュートンの力学，クラジウスの熱力学が，公理的な基礎の上に立っている．

ヒルベルトの『幾何学基礎論』で，公理的な立場はもっと厳密なものとなった．理論の根本概念は，事物に関する表象がもとになってつくられるものだが，この新しい立場では，この表象の内容のうち，公理の中で述べられていること以外は，全て捨象する．最も狭い意味での公理論では，さらに，**存在を主張する形式**というものが重要な条件として付け加えられる．この点で，**公理的な方法**は，同じく理論の基礎づけの方法である**構成的な**あるいは**生成的な**方法とは

区別される[1]．構成的方法では，理論の対象は，単にものの**種類**[2]として導入されるにすぎないが，公理的な理論では，理論の命題の要素となる述語が**当てはまる事物の領域**をあらかじめ限っておき，これを1つの確定した体系（ないしは複数の確定した体系）として扱わなくてはならない．

このような“個体領域”の全体を前提する際には，公理で述べられている前提に，理想化を伴う前提が付け加わるのである．もっとも，有限個の確定した事物の全体だけを相手にしている理論の場合は，話は別であるが．

公理に述べられている以外の事態を捨象し，存在主張を伴うこの尖鋭化された形の公理論のことを，以下，簡単のため，“形式的な公理論”と呼ぶことにするが，この公理論は**無矛盾性の証明**を必要としていることが特色である．これに対して，内容的な公理論のほうは，根本概念を，よく知られている体験を引き合いに出して導入し，根本前提は，だれにもたやすく納得できる明白な事実をのべた形でたてるか，あるいは，経験の複合から抽出したものとして提示する．後者の場合，自然の法則をつかんだ結果とみえるものを表現しているのであり，また，理論の成果によって法則をつかんだという信念を補強することもねらっているのである．

形式的な公理論も，演繹を行う際に，また，無矛盾性を証明する際に，明白なものを必要とはする．しかし，次の重要なちがいがある．形式的な公理論が必要とする明白なものは，特定の事態に固有の認識に関連しているものではなく，どの公理論においても同じものである．すなわち，精確な理論的探求において常に必要な前提となっている基本的な認識方法である．この種の明白については，後でもっと詳しく考察することにする．

内容的な公理論と形式的な公理論との関係が，認識のうえでどのような意義を持っているかを正しく見積るためには，何よりもまず，次のようなことを考えてみる必要がある．

形式的な公理論は内容的な公理論によって補われなくてはならない．というのも，内容的な公理論があるからこそ，どういう形式的体系を選んだらよいかがわかるのだし，すでに存在している形式的体系の場合には，事実の領域でこの体系を応用するにはどうしたらよいかが示されるのだから．

---

[1] この区別については，ヒルベルトの1900年刊『幾何学基礎論』第6付録（数の概念について）を参照せよ．

[2] Von Brower とその学派は，この意味で“スペキエース（種）”という用語を使った．

他方，内容的な公理論だけですましているわけにはいかないのは，次のような事情からである．科学においては，常にとはいわないまでも，極めて多くの場合，現実の事態をそっくりそのまま述べてはいず，事実を**単純なもので置き換える理想化**を提示する理論を扱うからである．こういう理論は，この理想化のゆえに価値のあるものとなっているのである．このような理論の根拠は，公理の自明性を引き合いに出すことによっても，経験を引き合いに出すことによっても得られない．根拠づけは，むしろ次の形でしか得られない．すなわち，その理論の中で果たされた理想化，つまり，理論の概念形成や根本命題を，直観的に明白な事柄ないし経験によって得られるデータを超え出たところまで延長することの中に矛盾がないことをみてとるという形である．この無矛盾性の認識においては，根本命題が近似的に正しいことも助けにはならない．なぜなら，近似的にしか成り立たない関係を一般的に成り立つものとしてしまうことから矛盾が起きることもありうるからである．

そこで，理論的な体系の無矛盾性を現実の事実の考察から切離して考察することが必要となる．こうなると，すでに形式的公理論の立場に立っていることになるのである．

この問題を扱うにあたっての今までの方法は，幾何学の場合でも，物理科学の場合でも，**算術化の方法**であった．この方法では，理論の対象を数または数の体系によって表し，根本関係を方程式または不等式によって表す．この翻訳により，理論の公理が算術の等式または定理になるのが，幾何学の場合である．物理学などでは，数学的な条件の組となり，この組が一挙に満たされうることが算術の存在定理によって示される．この手続きにおいては，算術，すなわち実数の理論（解析学）が正しいことが前提されている．そこで，この正しさとはどういう正しさであるのかという問いが生ずる．

この問いにとりかかる前に，無矛盾性の問題に直接あたるようなやり方はないものかを調べてみることにしたい．この問題の構造を，1度しっかりみておこう．その際，**論理記号**にも少し触れておこう．この記号は，当面の目的にも非常に有用であることがわかるであろう．さらに，後になって，この記号のことをもっと立ち入って考察する必要が生ずるであろう．

公理論の例としては，**平面幾何学**を取り上げることにする．しかも，話を簡単にするために，位置の幾何学の公理（ヒルベルトの『幾何学基礎論』では，“結合の公理” および “順序の公理” としてあげられているもの）ならびに平行線の

公理だけを考察することにする．さて，ヒルベルトの幾何学基礎論では，点と直線とをそれぞれ別の種類の根本的な事物としているが，ここでの目的のためには，**点だけを個体としておく**ほうが便利である．そこで「点 x と y とは直線 g を決定する」という関係の代わりに「x, y, z は一直線上にある」という関係が登場することになるが，これを $Gr(x, y, z)$ で表すことにする．この関係に加えて，第2の根本的な関係として間にあるという関係が登場する.「x は y と z との間にある」という関係で，これを $Zw(x, y, z)$ で表す[3]．公理には，さらに論理に属する概念の1つである x と y との同一性が登場するが，これは普通の等号を使って $x = y$ と表す．

公理を記号で表すには，さらに論理記号がいる．その第1は全称記号と存在記号とである．$P(x)$ をもの x についての述語だとすると，$(x)P(x)$ は,「全ての x には $P(x)$ という性質がある」ということを表し，$(Ex)P(x)$ は「$P(x)$ という性質のものがある」を表す．(x) を "全称記号" と呼び，$E(x)$ を "存在記号" と呼ぶ．全称記号や存在記号は x だけではなく，他の変数 y, z, u をとってもよい．この2つの記号に属する変数は，その記号によって「束縛されて」いる．ちょうど，積分の変数が積分記号によって束縛されているようなものである．こうして，この2つの記号が登場している文全体の意味は，束縛されている変数の特定の値には依存しないものとなる．

この他の論理記号として，否定のための記号と，合成文をつくる記号が付け加えられる．1つの文の否定は，その文の上に線を引くことで示すことにする．文の先頭に全称記号または存在記号があるときには，否定のための線はこの記号の上だけに引くものとし，$\overline{x = y}$ は，手短かに $x \neq y$ と書くものとする．2つの文の間におかれた記号 & （"で"）は，2つの文がともに正しいことを意味する（"合接"）．2つの文の間の記号 $\vee$（ラテン語の "vel" の意味での "か"）は，少くともどちらか1つの文が正しいことを意味する（"離接"）．

2つの文の間の記号 $\rightarrow$ は，1番目の文が正しければ2番目の文も正しくなること，言い換えれば，2番目の文が正しくないのに1番目の文が正しくなることはないことを意味する（"含意"）．2つの文 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ の間の含意 $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ は，したがって $\mathfrak{A}$ が正しくて，$\mathfrak{B}$ が正しくないときにだけ正しくない．他の全て

[3]点だけを個体としてとるやり方は，特に OSWALD VEBLEN の "A system of axioms for geometry", *Trans. Amer. Math. Soc.* 5: 343–384 (1904) で実行されている．そのうえ，この論文では，幾何学的な関係は全て "間にある" 関係を使って定義されている．

の場合には正しい.

含意記号を全称記号とを結び付けると，仮定文の全称化が行われる．例えば，$\mathfrak{A}(x,y), \mathfrak{B}(x,y)$ が，それぞれ，x と y との間の一定の関係を述べた文だとすると，命題式

$$(x)(y)(\mathfrak{A}(x,y) \rightarrow \mathfrak{B}(x,y))$$

は「$\mathfrak{A}(x,y)$ が成り立てば，$\mathfrak{B}(x,y)$ も成り立つ」という文，あるいは「$\mathfrak{A}(x,y)$ が当てはまるような，個体 x,y の全てについて $\mathfrak{B}(x,y)$ も当てはまる」という文を表す[4].

命題の構成部分をくくるには，括弧を普通に使われているようにして用いる．その際，括弧の数を倹約するために，次のように取り決める．記号表現を結び付ける強さでいうと，$\vee$ が $\&$ よりも強く，$\&$ は $\rightarrow$ よりも強い．また，全称記号や存在記号は，$\rightarrow$，$\&$，$\vee$ のどれよりも強い．意味がまぎれるおそれのないところでは，括弧を適宜省略する．例えば，$R(x,y)$ が x と y との間のある関係を表しているときには，

$$(x)\big((Ey)R(x,y)\big)$$

と書くべき表現を，単に $(x)(Ey)R(x,y)$ と書く．こう書いても，読み方は，次のように一義的に決まるからである.「全ての x に対して y があって $R(x,y)$ が成り立つ」

これで，今考察している公理体系を命題式で書き表す用意ができた．理解を助けるために，最初の公理群には用語による解釈を付け加えておく．

公理の区分は，ヒルベルトの『幾何学基礎論』での区分に全て対応しているわけではない．そこで，どの公理群についても，ここで命題式で書かれている公理とヒルベルトの公理との関係を述べておくことにする[5].

---

[4] ここで定義した離接と含意とが，普通使われている意味での選言判断や仮言判断とどういう関係になっているかについては，原書 I, §3 でも述べている．

[5] この添え書きは，とりわけ，ヒルベルトの『幾何学基礎論』を知っている読者のためのものであり,『幾何学基礎論』の第 7 版によっている．

I. 結合の公理[6]

1)　$(x)(y)Gr(x,x,y)$.

「x,x,y は，常に一直線上にある.」

2)　$(x)(y)(z)\bigl(Gr(x,y,z) \to Gr(y,x,z)\ \&\ Gr(x,z,y)\bigr)$.

「x,y,z が一直線上にあるときは，いつも，y,x,z も，x,z,y も一直線上にある.」

3)　$(x)(y)(z)(u)\bigl(Gr(x,y,z)\ \&\ Gr(x,y.u)\ \&\ x \neq y \to Gr(x,z,u)\bigr)$

「x,y が異なる点であり，x,y,z も，x,y,u も一直線上にあるならば，x,z,u もまた，常に一直線上にある.」

4)　$(Ex)(Ey)(Ez)\overline{Gr(x,y,z)}$.

「一直線上にない点 x,y,z がある.」

これらの公理のうち，1) と 2) とは，(根本概念の変更によって) 公理 I 1 の代わりをつとめ，3) は公理 I 2 に対応し，4) は公理 I 3 の後半の部分に対応するものである.

II. 順序の公理[7]

1)　$(x)(y)(z)\bigl(Zw(x,y,z) \to Gr(x,y,z)\bigr)$.

2)　$(x)(y)\overline{Zw(x,y,y)}$.

3)　$(x)(y)(z)\bigl(Zw(x,y,z) \to Zw(x,z,y)\ \&\ \overline{Zw(y,x,z)}\bigr)$.

4)　$(x)(y)\bigl(x \neq y \to (Ez)Zw(x,y,z)\bigr)$.

「x と y とが異なる点であれば，x が y と z との間にあるような点 z が常に存在する.」

5)　$(x)(y)(z)(u)(v)\bigl(\overline{Gr(x,y,z)}\ \&\ Zw(u,x,y)\ \&\ \overline{Gr(v,x,y)}$
$\&\ \overline{Gr(z,u,v)} \to (Ew)\{Gr(u,v,w)\ \&\ Zw(w,x,z) \lor Zw(w,y,z)\}\bigr)$.

1) と 2) とを合わせたものが，ヒルベルトの公理 II 1 の前半にあたる. 3) はヒルベルトの公理 II 1 の後半と II 3 とを結び付けたものになっている. 4) は公理 II 2 であり，5) は平面上の順序の公理 II 4 である.

---

[6]訳注: ここで使う記号 Gr は，ドイツ語の "Gerade (直線)" からきている.

[7]訳注: ここで使う記号 Zw は，ドイツ語の "zwischen (間に)" からきている.

III. 平行線の公理

ここでは合同公理は取り上げないことにするので，平行線の公理は，次の強い形で与えなくてはならない.「どの直線にも，その直線外の1点を通り，その直線を切らないような直線がちょうど1本だけある.」[8]

記号による表現が入り組んだものとなるのを避けるために

$$\overline{(Ew)}\big(Gr(x,y,w)\ \&\ Gr(u,v,w)\big)$$

という表現を短く

$$Par(x,y;u,v)$$

で表すことにする[9].

「x と y とも，u と y とも，一直線上にあるような点 w はない.」

すると，公理は次のようになる.

$$(x)(y)(z)\Big(\overline{Gr(x,y,z)} \to (Eu)\big\{Par(x,y;z,u)\ \&\\ (v)\big(Par(x,y:z,v) \to Gr(z,u,v)\big)\big\}\Big)$$

ここにあげた公理を，あげた順序に & でつないだものを考えると，述語 Gr, Zw についての命題を表すただ1つの命題式を得ることになるが，これを

$$\mathfrak{A}(Gr, Zw)$$

で表すことにする.

同様にして，位置と順序だけに関する平面幾何学の定理を，命題式

$$\mathfrak{S}(Gr, Zw)$$

で書くことができる.

この書き方は，しかし，まだ内容的公理論に即しているものである. 内容的公理論では対象の間の基本的な関係は，経験ないし直観的表象の中で示されるものであり，したがって内容的に決定されているものであるとされる. 理論の定理は，この内容について主張しているものである.

---

[8]ヒルベルトの『幾何学基礎論』83ページ参照.

[9]訳注: ここで使う記号 Par は，ドイツ語の “parallel (平行の)” からきている.

形式的公理論では，これに対して，基本的な関係は，あらかじめ内容が決定されているものとは考えられず，公理によって初めて，その公理を満たす何ものかであるという限りにおいて，その意味が決定されるのである．公理論の形の理論について考えるときには，基本的な関係については，公理にはっきり述べられていることだけを使うのである．

だから，公理的な幾何学で「の上にある」とか「間にある」とかいった，直観的な幾何学に対応した関係を指す用語が使われているのは，習慣にさからわないため，また直観的な事実への応用をやさしくするためにすぎない．しかし，形式的公理論においては，基本的な関係は，実のところ述語変数の役割を演じているのである．

ここでも，また以下でも，“述語”という用語は，広い意味に使うこととし，2つのものの組，あるいはそれ以上の数のものの組に当てはまる述語も仲間に入れることにする．この組に入るものの数に応じて，“単項述語”，“2項述語”...などという．

ここで例に取り上げている公理的幾何学の一部分には，2つの3項述語変数

$$R(x,y,z),\quad S(x,y,z)$$

が登場している．

今問題にしている公理系は，$\mathfrak{A}(Gr,Zw)$ の，$Gr(x,y,z)$ を $R(x,y,z)$ で，$Zw(x,y,z)$ を $S(x,y,z)$ で置き換えて得られる命題式 $\mathfrak{A}(R,S)$ によって表現されている条件を満たすことを，この2つの述語変数に代入されるべき述語に要求しているものである．この命題式には，述語変数の他に，内容的なものととられるべき同一性の表現 $x=y$ が登場している．この内容的な規定をそのままにしておいても，我々の方法論上の立場にもとることはない．なぜなら，同一性（これは，本来的な意味でいえば関係ではない）の内容を決めることは，公理的な研究の対象となっている領域に固有の表象に基づいて行われることではなく，個体領域を1つたてるときには常に前提にされなくてはならない個体の分離にしか，かかわらないことだからである．

以上のような考え方によれば，$\mathfrak{S}(Gr,Zw)$ という形の定理に対応するのは，次のような論理的内容の確定である．$\mathfrak{A}(R,S)$ という要求を満たしている**任意の** 述語 $R(x,y,z),S(x,y,z)$ に対しては，また関係 $\mathfrak{S}(R,S)$ が成り立つ．だから，任意の述語 $R(x,y,z),S(x,y,z)$ について，命題式

$$\mathfrak{A}(R,S) \to \mathfrak{S}(R,S)$$

は，正しい命題を述べているのである．幾何学の文が，こうして純粋述語論理の文に変わるのである．

まったく同様に，この立場では，無矛盾性の問題も純粋述語論理の問題となる．すなわち，2 つの 3 項述語 $R(x,y,z), S(x,y,z)$ が命題式 $\mathfrak{A}(R,S)$ にまとめられた条件を満たすことができる[10]か，それとも反対に，命題式 $\mathfrak{A}(R,S)$ を満たす述語の対があるという仮定から矛盾が導かれ，したがって，一般にどの述語対 R,S に対しても，命題式 $\overline{\mathfrak{A}(R,S)}$ が正しい文を述べていることになるのかということが問題になるのである．

このような問題は，“**決定問題**” の一種である．現代論理学でいう決定問題とは，命題式の “恒真性” または “充足可能性” を決定するための一般的な方法をみつけよという問題のことである[11]．

ここで問題になる命題式は，述語変数と等式とから論理記号を使って組み立てられたものである．例えば 3 項述語 $R(x,y,x)$ での x,y,z のように，述語が当てはまるべきものの名前が代入される場所を示す文字を，“個体変数” と呼ぶが，個体変数は，この命題式の中では，全て全称記号か存在記号かにより束縛されているものとする．

この種の命題式は，述語変数の値を**どのように決めても**正しい命題となるとき，恒真的であるという．述語変数の値を**適当に決めると**正しい命題となるとき，充足可能であるという．

恒真的な命題式の簡単な例は，次のようなものである．

$$(x)F(x) \mathbin{\&} (x)G(x) \to (x)\bigl(F(x) \mathbin{\&} G(x)\bigr)$$
$$(x)P(x,x) \to (x)(Ey)P(x,y)$$
$$(x)(y)(z)\bigl(P(x,y) \mathbin{\&} y = z \to P(x,z)\bigr)$$

充足可能な命題式の例は

$$(Ex)F(x) \mathbin{\&} (Ex)\overline{F(x)}$$

---

[10] この問題の立て方には，まだ荒っぽいところがあるが，後になってこの点をもっと精密にする．

[11] もっとも，この説明が当てはまるのは，狭い意味の決定問題についてだけである．決定問題のもっと広い意味には，ここでは立ち入る必要はない．

$$(x)(y)\bigl(P(x,y)\ \&\ P(y,x) \rightarrow x = y\bigr)$$
$$(x)(Ey)P(x,y)\ \&\ (Ey)(x)\overline{P(x,y)}$$

これらの命題式は，例えば，数の1と2とからなる個体領域で，次のような代入をすれば，正しい命題となる．第1の命題式では，$F(x)$ に述語「x は偶数である」を代入し，第2の命題式では，$P(x,y)$ に，述語 $x \leq y$ を代入し，第3の命題式では $P(x,y)$ に，述語 $x \leq y\ \&\ y \neq 1$ を代入する．

ここで注意しておかなくてはならないのは，述語を決めると同時に，変数 $x, y, \ldots$ がその上を走る**個体領域** も確定しておかなくてはならないということである．この個体領域は，いわば**隠れた変数** として命題式の中に入ってくる．しかし，命題式の充足可能性は，1つの個体領域が，1対1の写像によりもう1つの個体領域に変わっても不変である．なぜなら，個体は個体変数としてしか命題式に登場していないからである．だから，個体領域の本質を決める性質は，その中の**個体の数**である．

そこで，恒真性と充足可能性とについて，次のような問題の区別をたてなくてはならない．

1. **全ての**個体領域に対する恒真性についての問題と，充足可能な個体領域が**1つでもあるか**という問題.

2. 所与の個体数に関する恒真性の問題と充足可能性の問題.

3. どの個体数について恒真性が成り立つか，また，充足可能性がなりたつかという問題.

個体数零を排除しておくのを原則としたほうがよいことに注意しておこう．というのは，個体数が零の個体領域は形式的には特殊な位置にあり，一方，その考察はつまらなく，応用上の価値もないからである[12].

---

[12]全ての個体領域は少くとも1つのものを含んでいなくてはならず，したがって，正しい全称判断は，少くとも1つのものに当てはまらなくてはならないと決めることを，アリストテレス論理学で行われている次のような約束と混同してはならない．この約束では,「全ての S は P である」という形の判断は，そもそも性質 S を持つものが存在するときにだけ正しいものとなりうる．この約束は現代論理学では捨てられた．この形の判断は，記号では $(x)\bigl(S(x) \rightarrow P(x)\bigr)$ と書かれ，もの x が，性質 $S(x)$ のものであるときには常に性質 $R(x)$ のものでもあるときに正しくなるのであり，性質 $S(x)$ のものがそもそも存在するかどうかは，この際関係がない．この点については，述語論理の演繹的な構成を取り上げるとき，再び論ずるであろう（原書 I, §4, 105–106 ページ参照）．

さらに注意しておくべきことは，述語の決定では，その“値の分布”だけが重要であるということである．すなわち，個体変数のどの値に対してその述語が当てはまるか，どの値に対して当てはまらないか（「正しい」か,「正しくない」か）ということだけが重要なのである．

したがって，**所与の有限の**個体数については，所与の命題式の恒真性や充足可能性は，全ての場合を調べつくすという初等的なやり方で話が決まる**純粋に組み合わせだけの問題**だということになる．

つまり，n を個体数，k を 1 つの述語の項(“空いている場所”，例えば $P(x, y, z)$ では，x，y，z が項である）の数とすれば，n^k が変数の値の組の数である．この組のそれぞれについて述語は正しいか，正しくないかのどちらかであるから，k 項述語に対して可能な値の分布は

$$2^{(n^k)}$$

通りあるということになる．

そこで

$$R_1, \ldots, R_t$$

を，所与の 1 つの命題式に含まれる，相異なる述語変数とし，

$$k_1, \ldots, k_t$$

を，そのパラメータの数とすると，

$$2^{(n^{k_1}+n^{k_2}+\ldots+n^{k_t})}$$

が，考察の対象となっている値の分布の数である．言い換えれば，述語の組み合わせとすることができるものの数である．

こうすると，命題式の恒真性とは，この

$$2^{(n^{k_1}+\ldots+n^{k_t})}$$

個の値の分布のどれに対してもその命題式が正しい文を表すことであり，充足可能性とは，これらの分布の中の 1 つに対して正しい文を表すことであるということになる．このとき，特定の分布に対して命題式があらわす文が正しいか正しくないかは，やはり有限回の吟味で決定できる．なぜなら，全称記号また

は存在記号と結び付けられた変数については n 個の値だけを考えればよいから，“全ての” は n 節の合接と，“がある” は n 節の離接と，同じ意味のことになるからである．

例として，前にあげた 2 つの命題式

$$(x)P(x,x) \to (x)(Ey)P(x,y)$$
$$(x)(y)\bigl(P(x,y)\ \&\ P(y,x) \to x = y\bigr)$$

を取り上げてみよう．第 1 の命題式は，恒真的な命題式として，第 2 の命題式は，充足可能な命題式としてあげられていたものであった．この 2 つの命題式が， 2 つの個体からなる個体領域に関するものだということにする．

その 2 つの個物を，数字の 1, 2 で表してよい．ここで，$t = 1, n = 2, k_1 = 2$ であるから，異なる述語の組の数は，

$$2^{(2^2)} = 2^4 = 16$$

となる．

$(x)P(x,x)$ の代わりに

$$P(1,1)\ \&\ P(2,2)$$

とおくことができるし，$(x)(Ey)P(x,y)$ の代わりに，

$$P(1,1) \lor P(1,2) \lor\ \&\ P(2,1) \lor P(2,2)$$

とおくことができる．そこで第 1 の命題式は，次の形に変わる．

$$P(1,1)\ \&\ P(2,2) \to P(1,1) \lor P(1,2)\ \&\ P(2,1) \lor P(2,2).$$

この含意は，

$$P(1,1)\ \&\ P(2,2)$$

が正しくなくなるような述語 P について正しくなり，また

$$P(1,1) \lor P(1,2)\ \&\ P(2,1) \lor P(2,2)$$

が正しくなるような述語 P について正しい．さて， 4 通りの値の対

$$(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$$

のそれぞれに,「正しい」「正しくない」の正否値のどちらかを割り当てることによって得られる 16 通りの値の分布のどれについても，今述べた 2 つの条件のうちの 1 つが満たされること，したがって全体の命題がいつも正しくなることは，たやすく確かめることができる（この例の場合には，$P(1,1)$ と $P(2,2)$ との値を決めるだけで，命題全体の正しさを決めるには十分なことに気づけば，検証は簡単になる）．このようにして，第 1 の例の命題式の，2 個の個体からなる個体領域に関しての恒真性は，直接的な検算によって確かめられる．

例の 2 番目の命題式は，2 個の個体からなる個体領域に関しては，次の合接と同じ意味のことをいっている．

$$\big(P(1,1) \ \& \ P(1,1) \to 1 = 1\big) \ \& \ \big(P(2,2) \ \& \ P(2,2) \to 2 = 2\big)$$
$$\& \ \big(P(1,2) \ \& \ P(2,1) \to 1 = 2\big) \ \& \ \big(P(2,1) \ \& \ P(1,2) \to 2 = 1\big).$$

$1 = 1$ と $2 = 2$ とは正しいから，合接の初め 2 つの節は，常に正しい命題である．後の 2 つの節は，

$$P(1,2) \ \& \ P(2,1)$$

が正しくないとき，またそのときにだけ正しい．

そこで，問題の命題式の充足には，P の値の決定の中 $(1,2)$ と $(2,1)$ とがともに「正しい」という値を与えるものだけを除けばよい．これ以外の決定は常に正しい命題を与える．だから，この命題式は 2 個の個体からなる個体領域に関して充足可能性である．

この 2 つの例で，有限の個体数が与えられている場合の決定問題が，有限個の組み合わせについて調べていくだけの問題になることが，明らかになったはずである．この組み合わせ論的な性格から，特に，次のことが出てくる．有限の個体数が決められると，命題式 $\mathfrak{F}$ の恒真性は，命題式 $\overline{\mathfrak{F}}$ が充足可能ではないことと同じことであり，命題式 $\mathfrak{F}$ の充足可能性は，命題式 $\overline{\mathfrak{F}}$ が恒真的ではないことと同じことである．実際，$\mathfrak{F}$ が正しい命題となるような述語の組に対しては，$\overline{\mathfrak{F}}$ は正しくない命題を与え，逆もいえる．

公理系の無矛盾性の問題に戻ろう[13]．今の例のように，公理系が記号で書か

[13]2 ページ以降参照．

れ，1つの命題式にまとめられているとする．この1つにまとめられた命題式の充足可能性は，所与の有限の個体数に対しては，少くとも原理的には，検算によって決定できる．そこで，ある特定の個体数について，この命題式の充足可能性が示されたとする．すると，その公理系の無矛盾性も示されたことになる．しかも，この際，この有限の個体領域と（充足のため）選ばれた述語の値の分布とは，その公理系のモデルとなっているから，このモデルによって具体的に公理の充足可能性を示すという，**例示の方法**が使われたことになる．

幾何学の公理論から，例示の方法の例を拾ってみよう．上にあげた公理系から出発するが，一直線上にない3点の存在を要求している公理I 4) を，これよりは弱い次の公理で置き換える．

I 4′)　$(Ex)(Ey)(x \neq y)$
「相異なる2つの点がある．」

さらに，平面の順序の公理II 5) を除き，その代わりに，II 5) を使って証明できる次の2つの定理を公理に付け加える[14]．
まず，II 4) を拡張して

II 4′)　$(x)(y)\{x \neq y \rightarrow (Ez)Zw(z,x,y)\ \&\ (Ez)Zw(x,y,z)\}$

とし，次に

II 5′)　$(x)(y)(z)\{x \neq y\ \&\ x \neq z\ \&\ y \neq z$
$\rightarrow Zw(x,y,z) \vee Zw(y,z,x) \vee Zw(z,x,y)\}$

を加える．

平行線公理はそのままにしておく．このようにして成立した公理系は，以前の命題式 $\mathfrak{A}(R,S)$ に代わる命題式 $\mathfrak{A}'(R,S)$ に対応するものであるが，これは，O．VEBLEN が注意したように[15]，5つの個体がある個体領域によって充足される．述語 R, S ——ここで，再び“Gr”，“Zw”を使っても誤解のおそれはな

[14] この2つの定理は，ヒルベルトの『幾何学基礎論』の以前の版では，公理としてあげられていた．その後，これが，平面の順序の公理を使って証明できることが示された．この点については，『幾何学基礎論』第7版，5–6ページ参照．
[15] すでに引用した論文 “A system of axioms for geometry”, *Trans. Amer. Math. Soc.* 5: 350 (1904).

いであろう——の値の分布は次のように選ぶ．まず，述語“Gr”は，x, y, z の値の組の全てについて正しくなるように決める．すると，すぐわかるように，I の公理の全てが満たされ，さらに II 1) と III も満たされる．公理 II 2)，3)，5′)，4′) が満たされるためには，述語 Zw が次の 3 条件を満たすことが，必要十分である．

1. x, y, z の中の 2 つが同じものであるときには，Zw は常に正しくない．

2. 5 つの個体から，3 つの相異なる個体の組み合わせをとった場合，6 つの可能な順列の中に，Zw が正しくなる順列が 2 つあり，その最初の個体は共通である．例えば，1 つが $(1, 2, 3)$ なら，もう 1 つは $(1, 3, 2)$ である．残りの順列については，Zw は，正しくない．

3. 相異なるものの対は，Zw が正しくなるような 3 つ組のどれかの初めの対となり，また，そのような 3 つ組のどれかの後ろの対となる．例えば，(1，2) をこの対とすると，(1，2，x) の形の 3 つ組のどれか，また (x，1，2) の形の 3 つ組のどれかについて，Zw が正しくなる．

最初の条件は，さきほどの取り決めによってただちに満たされる．残りの 2 つの条件は，次のようにして両方とも満たされる．5 つのものを数字の 1，2，3，4，5 で示す．3 つの相異なるものからなる順列の数は $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ 個である．この中の 6 つずつがそれぞれ 1 つの組み合わせに属する．この 1 つの組み合わせに属する順列のうち 2 つについて Zw を正しくし，残りについては正しくないようにする．だから，60 個の 3 つ組のうち，20 個について Zw が正しくなるように定義しなくてはならない．それは，次の 4 つの 3 つ組

$$(1\ 2\ 5),\ (1\ 5\ 2),\ (1\ 3\ 4),\ (1\ 4\ 3)$$

から (1 2 3 4 5) のぐるぐる回しによって得られるものである．例えば (1 2 5) からは，(1 2 5) の他に，(2 3 1)，(3 4 2)，(4 5 3)，(5 1 4) が得られる．

これで全ての条件が満たされることは，たやすく確かめることができる．このようにして，問題の公理系は例示の方法によって無矛盾であることがわかった[16]．

この例で使われた例示の方法は，最近の公理的な研究において極めてさまざ

[16] この修正された公理系が，5 個の個体からなる個体領域において充足可能であるという事実から，この公理系の公理が線形順序を決めるのに十分なものではないことがただちに出てくる．

まなやり方で応用されている．特に**独立性の証明**に使われている．公理系 $\mathfrak{A}$ から命題 $\mathfrak{S}$ が独立であるという主張は，$\mathfrak{S}$ の否定を公理として $\mathfrak{A}$ に付け加えていられる公理系

$$\mathfrak{A}\ \&\ \overline{\mathfrak{S}}$$

が無矛盾であることを主張するのと同じことである．この公理系が有限の個体領域で充足可能であることを示すことができれば，その無矛盾性を，例示の方法で確立することができる[17]．したがってこの方法は，原理に触れる研究において，推論による進行の方法を十分に補足するものである．特定の公理系からの定理の証明が可能であることを，推論が示すのに対し，例示は，命題が特定の公理系から証明できないことを示すからである．

さて，例示の方法の応用は，有限の個体領域に限られるものであろうか．今まで調べてきたことだけからは，まだ，そうとは断言できない．しかし，ただちにみてとれることは，無限の個体領域においては，可能な述語の組の全体を見通すことはもはやできないし，値の分布の全てを調べつくすことは問題にならないということである．とはいえ，特定の公理については特定の述語により，その充足可能性を例示することができるかもしれない．しれないだけではなく，事実そうなのである．例えば，次の3つの公理からなる系を取り上げてみよう．

$$(x)\overline{R(x,x)},$$
$$(x)(y)(z)\big(R(x,y)\ \&\ R(y,z) \rightarrow R(x,z)\big),$$
$$(x)(Ey)R(x,y).$$

この公理群がいおうとしていることを説明する．個体領域の個体 a から話を始める．第3の公理から，$R(a,b)$ が正しくなるような b がなくてはならず，これは第1の公理から，a とは別のものである．b についても $R(b,c)$ が正しくなる c がなくてはならず，第2の公理から，$R(a,c)$ も正しい．第1の公理から，c は，a とはちがい，b ともちがう．c についても，$R(c,d)$ が正しくなる d がなくてはならず，これについては，$R(a,d)$ も，$R(b,d)$ も正しくて，d は

[17]E.V. Huntigton とその共同研究者による線形順序と円環順序とについての論文の中に，この手続きの例が多数見いだされる．特に，論文 “A new set of postulates for betweenness with proof of complete independence”, *Trans. Amer. Math. Soc.* 26: 257–282 (1924) 参照．この論文には，先行の論文についての指示もある．

a, b, c のそれぞれとは別のものである．この考え方による手続きには終わりがないので，有限な個体領域では公理は満たされないことがわかる．他方，無限の個体領域を使う例示の方法で，公理が満たされることをたやすく示すことができる．すなわち，個体としては整数をとり，$R(x,y)$ には，「x は y より小さい」という関係をあてる．すると，3つの公理が全て満たされることがただちにわかる．

同じことが，次の3つの公理についても成り立つ．

$$(Ex)(y)\overline{S(y,x)},$$
$$(x)(y)(u)(v)\big(S(x,u)\ \&\ S(y,u)\ \&\ S(v,x) \to S(v,y)\big),$$
$$(x)(Ey)S(x,y).$$

これについても，有限な領域では満たすことができないことはたやすく示される．他方，正の整数の領域では，$S(x,y)$ に「y は x の直後の数である」という関係を当てれば満たされる．

これらの例につていは，しかし，次のことを注意しておかなくてはならない．このような例示では，問題の公理の無矛盾性の問題が，窮極的に解決されたわけではなく，むしろ，**整数論の無矛盾性の問題**に引き戻されたということである．我々は，前にあげた有限な領域での例示においても，整数を個体として使った．しかし，それは個体の表示を簡単にするためだった．数の代わりに他のもの，例えばアルフアベットを使ってもよかった．また，整数の性質として使ったものは，具体的な例示によって確かめることできるものばかりだった．

今回は，しかし，具体的な数の表象だけですますわけにはいかない．なぜなら，**整数は1つの個体領域をなしている**，したがって，完結した全体を形づくっているという前提を，本質的に必要としているからである．

この前提は，しかし，極めてよく知られているものである．というのも，現代数学においては，たえずこの前提を使って操作を行っているからであり，この前提は自明なものととられがちである．FREGE が初めて，「数の系列を完結した全体とする考え方は，まず無矛盾性の証明によって確かなものとしておかなくてはならない」という要求を，印象強いいい方で，また鋭い機知に満ちた批判を通してたてたのである[18]．FREGE の意見では，そのような証明は，存在

[18]GOTTLOB FREGE: “Grundlagen der Arithmetik”, Breslau (1884), ならびに

証明としての例示の方法で行う他はなく，彼はそのような例示の対象を論理学の領域に見いだしたと信じた．彼の例示のやり方は，考えられる限りの単項述語の全体が存在しているものと前提し，この前提を使って数の全体を定義するというものだった．しかし，ここでの前提は，とらわれない目にはすでにかなり疑わしいものとみえるうえに，RUSSELL と ZERMELO によって発見された論理的な逆理や，集合論的な逆理によって，受け入れることのできないものであることが示された．FREGE の議論にもまして FREGE の失敗のほうが，数の全体を仮定することに含まれている問題を意識させたのである．

この問題については，数系列の代わりに他の無限な個体領域を無矛盾性の証明に使ってみることができるかもしれない．この領域は，数の系列のような思考の産物ではなく，感覚的な知覚から，あるいは実際の現実から取り出したものである．しかし，詳しく調べてみると，感覚でとらえられる性質の領域や物理的な世界で無限な多様性に出会えるように思えるところでも，実際にそういう多様性をみつけることは問題にならず，そのような多様性があるという確信は，思考の外挿に基づいていることがわかる．このような外挿は，無批判に受け入れべきものではなく，数系列の全体という考え方と同様，正当化できるものかとうか検討してみなくてはならないものである．

このことを示す典型的な例は，有名なゼノンの逆理を引き起こした無限である．線分を有限の時間に駆け抜けたものがあるとすると，この駆け抜けには，無限個の相続く部分が含まれている．まず，線分の前半を駆け抜け，次にこれに続く 4 分の 1 を駆け抜け，さらにこれに続く 8 分の 1 を駆け抜け，以下同様に続く．実際の運動を扱う場合には，これらの部分は引き続いて起きるまったく現実の過程である．

この逆理を，この無限の時間間隔の和が収斂して有限の時間間隔になるということをいって，しりぞけるのが通例となっている．しかし，この論証では逆理の本質的な点に触れていない．すなわち，考えの中では実際に完結させることができないだけではなく，原理的に完結させることができない無限の継起が現実には完結しているという逆説的な面に触れていない．

実をいうと，この逆理にはもっと根本的な解決がある．それは，「数学的な運動の記述は，任意に小さい空間的な広がりや時間的な広がりに対してもなお物

“Grundgesetze der Arithmetik”, Jena (1893).

理的な意味を持つ」と信じなくてはならない理由はないとするものである．そうして,「問題の数学的モデルは，一定の経験領域の事実，特に，今まで観察できた大きさの範囲での運動を経験できる範囲を超え，単純な概念形成により外挿するものである」とするべき理由は大いにあるとするものである．この外挿は，連続体の力学が，空間が物質により連続的に満たされるとする考え方を基礎において行う外挿に似ている．一定量の水を際限なく分割していった場合，いつまでも水にとどまっているわけではない．ちょうどそのように，運動を際限なく分割していった場合，いつまでも運動といわれるべきものが成立しているわけではない．このことを認めれば，逆理は消える．

そうではあるけれども，運動の数学的モデルは，記述を簡単にするための**理想化による概念形成**としては，依然として価値のあるものである．ただし，このモデルが，記述の単純化という目的を果たすためには，記述が現実と近似的に一致しているというだけではなく，このモデルで行われる外挿が，矛盾を内蔵していないということが必要である．この観点からすると，運動についての数学的な考え方は，ゼノンの逆理によっては少しもゆらがない．収斂を持ち出す，あの数学的な反論は，ここでは十分効を奏する．運動の数学的理論の無矛盾性の証明が実際にあるかということは，しかし，別の問題である．この理論は，本質的に連続体についての数学的理論に支えられており，連続体の理論は，本質的に整数全体の集合を完結した全体とみなす考え方に支えられている．そこで，運動が実際に行われているという事実を指すことで避けるつもりだった問題に再び戻ってきたことになる．

例えば，オクターブからオクターブへと無限に続く音の系列や，１つの色から別の色に移るときの連続的な無限の多様性といったものにおいては，経験または直観によって無限が直接的に与えられると信ぜられている．しかし，こういった場合においても，事態は，全て今述べたことと同様なのである．詳しく調べてみると，いつも無限が実際に与えられているのではなく，思考の過程により，内挿または外挿されているのであるということがわかる．

以上の考察により，無限な多様性の存在の問題は，数学外の対象を引き合いに出すことでは決定できず，数学の中で解かれなくてはならないということがわかった．しかし，どうしたらそういう解決に手をつけることができるのだろう．一見したところでは，不可能なことが要求されているようである．無限に多くの個体を眼の前に並べてみせることは，原理的に不可能なことである．だ

から，無限の個体領域自体は，構造によって，すなわち，その領域の個体の間に成り立っている関係によってしか示すことはできない．言い換えれば，この領域についての一定の形式的な条件が満たされているという証明が必要である．したがって，無限の個体領域の存在は，**一定の命題式の充足可能性によってしか，述べることはできない**．しかし，この命題式は，その研究が無限の個体領域の存在の問題に向かうきっかけとなった命題式と同じ種類のものである．そうして，この命題式の充足可能性は，無限の個体領域の例示によって，示されるべきものであった．例示の方法を，問題の命題式に使おうという試みは，そこで，悪循環に陥ることになる．

さて，例示は，公理系の無矛盾性の証明の手段にすぎないはずのものであった．このやり方は，所与の有限の個体領域の考察によってもたらされたものである．このような有限の領域については，命題式の無矛盾性が充足可能性と同じことであることがわかったのだった．

無限の個体領域の場合は，事態はもっと込み入っている．この場合にもなお，命題式 $\mathfrak{A}$ で表された公理系が，命題式 $\overline{\mathfrak{A}}$ が恒真的であるとき，またそのときに限って矛盾しているということは成り立つ．しかし，述語変数の値の分布の全体を見通すことはもはや問題にならないから，$\overline{\mathfrak{A}}$ が恒真的ではないときにも，だからといって，ただちに公理系 $\mathfrak{A}$ のモデルが得られると結論するわけにはいかない．

したがって，無限領域が問題になっているときには，公理系の充足可能性は，無矛盾性の十分条件ではあるが，必要条件であることは証明されていないのである．だから，無矛盾性の証明は充足可能性の証明によってもたらせるものだと一般的に期待するわけにはいかないのである．また，無矛盾性を，充足可能性を確かめることによって証明しなくてはならないということもない．むしろ，無矛盾性のもともとの否定的な意味を離れないようにすることができるのである．というのは，次のようなことである．公理系が再び命題式 $\mathfrak{A}$ で表されているとすると，命題式 $\mathfrak{A}$ の充足可能性を示す必要はなく，$\mathfrak{A}$ を満たす述語があるという仮定が論理的な矛盾を導かないことを証明するだけでよいのである．

この角度から問題に取り組むために，1つの公理系から引き出されることが可能な結論の全てを見通すことを目指してみることにする．このための方法としては，Frege, Schröder, Peano, Russell によって開発された**論理的推論の形式化**の方法が適している．

そこで，次のような課題に到達することになる．1) 論理的推論の原則を厳密に形式化し，推論規則の全体が見渡せるようにすること．2) 無矛盾であることを示すべき公理系として提示されているものにつき，次のことを証明すること．この**公理系 $\mathfrak{A}$ からの論理的演繹によっては矛盾が出てくることがありえないこと**，すなわち，1つがもう1つの否定であるような2つの命題式の両方が証明されることはありえないこと．

全ての公理系について，この証明を個々に行う必要はない．この節の始めにすでに述べておいた**算術化**の方法[19]を使うことができる．この方法は，ここでの立場からいうと，次のようなものである．見通しがよいので，それについて課題 2) の意味での無矛盾性の証明ができるような公理系 $\mathfrak{A}$ を探す．この公理系は，しかし，他方では内容がゆたかなので，この公理系を満たすものとして**存在することが前提されている**事物や関係の体系 $\mathfrak{S}$ を使い，幾何学や物理学の公理系が充足可能であることを導き出すことができるできるようなものでもなくてはならない．つまり，幾何学や物理学の公理系 $\mathfrak{B}$ の対象を，$\mathfrak{S}$ の個物，あるいはそのような個物の複合として表し，$\mathfrak{S}$ の根本関係から論理的な操作によってつくられるような述語を，$\mathfrak{B}$ の基本的な述語に当てるのである．

これで，公理系 $\mathfrak{B}$ が無矛盾であることが実際に示されたことになる．なぜなら，この公理系から引き出される矛盾があれば，それは公理系 $\mathfrak{A}$ から導き出される矛盾を表していることになるが，公理系 $\mathfrak{A}$ は無矛盾であることがわかっているのだから，そういうことはありえないのである．

（公理的に構成された）算術は，このような公理系 $\mathfrak{A}$ の一例になる．

この公理的な理論を算術に“還元する方法”は，算術が直観的に提示されるような事態をなしていることを要求してはいない．ここでは，算術は，無矛盾であることが示せるような概念の体系であって，そのうえ，次の条件を満たすものでありさえすればよいのである．この体系は，理論的な科学の公理系を組み入れることができる枠組となっているので，このような科学が，現実の事物について行う理想化もやはり無矛盾であることが示される．

以上の考察の結果は，次のようにまとめられる．公理系（ないし命題式）の充足可能性の問題は，有限の個体領域の場合には例示の方法によって肯定的に解くことができるが，公理の充足が無限の個体領域でしか考えられない場合に

---

[19] 2 ページ参照．

は，この方法では解くことができない．というのは，無限の個体領域の存在を，すでに確立しているものとすることはできないからである．むしろ，その無限を性格づけている公理系の無矛盾性の証明が行われて初めて，この無限の領域の導入が正当化されるのである．

決定問題を肯定的なやり方で解くことができない場合には，無矛盾性の証明は，否定的なやり方で，つまり**不可能性の証明**として行う他はない．その際には，論理的な推論の形式化が必要になる．

このような不可能性の証明の課題に取り組むときには，その証明が存在公理を使う方法では行われないことを理解しておかなくてはならない．理想化による存在仮定とは無関係な推論方法しか，使うことを許されてはいないのである．

このようなことを考えると，すぐに次の疑問がわいてくる．存在公理を前提とせずに不可能性の証明を行うことがができるのなら，それと同じやり方で直接，算術を根拠づけ，不可能性の証明はまったく不要のものにすることもできるはずではないか．この疑問は，以下の節で扱うことにしよう．

第2章　述語計算とそれに関連した形式的体系について

2.1　純粋な述語計算

変数とは，“自由”個体変数，“束縛”個体変数，パラメータを持たない論理式変数，または1つ以上のパラメータの代入場所を持つ論理式変数である．

個体変数は小文字アルファベットで記し，論理式変数は，大文字のアルファベットで記す．自由個体変数と束縛個体変数は，異なる個体変数の種類として扱うことにする．これらの変数の区別のために，アルファベットの文字の幾つかは自由個体変数に使い，他のものは束縛個体変数のために使うことにする．a, b, c, k, l, m, n, r, s は自由個体変数，x, y, z, u, v, w は束縛個体変数を表すといった具合いである．

注意．　どこで線を引くかは，そのときの必要に応じて決めることにする．ひとつながりの演繹的な考察の中で，区別が一定に保たれていれば十分だからである．特に，アルファベットの t に対して，この種の自由が適用されている．論理式変数は，それを表すアルファベットが異なるとき，あるいは，パラメータの代入場所の数が異なるとき，異なるものと考えることにする．

“**論理記号**”とは，“命題計算での演算”を表す記号のことである．これは，否定，合接（かつ），離接（または），含意（ならば），同値，それに全称記号と存在記号の“量化詞”である．

否定により $\mathfrak{A}$ という表現から $\bar{\mathfrak{A}}$ という 表現が得られる．$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ という表現からは，合接，離接，含意，同値の演算により，それぞれ

$$\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$$

が得られる．

全称記号と存在記号は，それぞれ束縛変数を伴っている．全称記号と存在記号の記号演算により，自由変数 $\mathfrak{c}$ を含み，束縛変数 $\mathfrak{x}$ は含んでいないような表現 $\mathfrak{A}(\mathfrak{c})$ から，

$$(\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}), \qquad (E\,\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$$

という表現が得られる．ここに，“$\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$” は，$\mathfrak{A}(\mathfrak{c})$ で変数 $\mathfrak{c}$ を，全て変数 $\mathfrak{x}$ で置き換えることにより得られる表現である．

変数 $\mathfrak{x}$ は $(\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))$，または，$(E\,\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ において，量化詞 $(\mathfrak{x})$ または $(E\,\mathfrak{x})$ に“属し”ており，これらの量化詞により“束縛されている”ということにする．$\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ は，それぞれの量化詞の“適用範囲”ということにする．

また，全称記号 $(\mathfrak{x})$ と存在記号 $(E\,\mathfrak{x})$ は変数 $\mathfrak{x}$ に属すともいうことにする．同じ束縛変数に属す量化詞は“同名”であるという．

幾つかの記号演算が組み合わされて行われるときには，表現のまとまりを示すために，括弧を用いる．以下の取り決めにより，括弧の節約ができる: $\bar{\mathfrak{A}}$，$(\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$，$(E\,\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ は括弧で囲まない; 否定される表現は括弧で囲まない; 含意表現や，同値表現の中に現れる合接表現および離接表現，また，合接表現の中に現れる離接表現は括弧で囲まなくてもよい; 合接表現の前半の構成要素として現れる合接節，また，離接表現の前半の構成要素として現れる離接節は括弧で囲まなくてもよい．これにより，複数の構成要素を持つ合接や離接が括弧なしでつくれることになる．

表現 $(\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$，$(E\,\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ の否定は，量化詞 $(\mathfrak{x})$，$(E\,\mathfrak{x})$ に上線を引くことで表すことにする．

変数と述語計算の記号からなる表現のうち，“論理式”は，以下のように特徴づけられる:

“初等論理式”とは，パラメータを持たない論理式変数，あるいは，自由変数をパラメータとして持つ論理式変数のことである．述語計算の“論理式”とは，初等論理式，あるいは，幾つかの初等論理式から出発して，述語計算の記号を適用することによって得られる表現である．つまり，論理式は以下の帰納的規定により得られる:

初等論理式は論理式である．$\mathfrak{A}$ が論理式のとき，$\bar{\mathfrak{A}}$ は論理式である．$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ が論理式のとき，$\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$，$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$，$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$，$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ も論理式である[1]．$\mathfrak{A}(\mathfrak{c})$

---

[1]訳注: これらの形をした論理式を，それぞれ合接論理式，離接論理式，含意論理式，同値論

が自由変数 $\mathfrak{c}$ を含み 束縛変数 $\mathfrak{x}$ を含んでいないような論理式のとき，$(\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, $(E\,\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ は論理式である[2].

個体変数を含まないような述語計算の論理式は，“命題計算”の論理式と呼ばれる．命題計算の論理式のうち，“恒等的に真”，あるいは略して“恒真な”論理式が，以下のような評価法によって定められる．命題計算の演算を“真偽値関数”として定義する．つまり，“真”と“偽”（これをアルファベットの w と f で表すことにする[3]）の値をとる関数で，次の（等式で表現される）値の定義によって決まるものとする:

$$\overline{w} = f, \quad \overline{f} = w, \quad w \,\&\, w = w, \quad w \,\&\, f = f, \quad f \,\&\, w = f, \quad f \,\&\, f = f,$$

とし，w と f の値の任意の組み合わせ p, q に対し

$$p \vee q = \overline{\overline{p} \,\&\, \overline{q}}, \quad p \to q = \overline{p} \vee q, \quad p \sim q = (p \,\&\, q) \vee (\overline{p} \,\&\, \overline{q})$$

とする．このとき，恒真な命題計算の論理式は，そこに現れる個々の論理式変数に，どのように真偽値を割り当てても，関数値の計算結果が真となるようなものとして規定される．

述語計算での導出とは何かを規定するために，まず“代入”と“書き換え”の手続きを定義しなければならない．

論理式 $\mathfrak{A}$ での 自由個体変数 $\mathfrak{a}$ への代入とは，$\mathfrak{A}$ に現れる $\mathfrak{a}$ の全てを同一の自由個体変数 $\mathfrak{b}$ で換えることである．このときには，$\mathfrak{A}$ において，変数 $\mathfrak{a}$ に変数 $\mathfrak{b}$ を代入したということにする．

論理式の中の束縛変数 $\mathfrak{x}$ の書き換えとは，この変数の属す量化詞の適用範囲内に現れるこの変数と量化詞自身とが，$\mathfrak{x}$ と異なる同一の束縛変数 $\mathfrak{y}$ で置き換えられ，これにより論理式，あるいは論理式の構成要素が，$(\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ から，$(\mathfrak{y})\mathfrak{A}(\mathfrak{y})$

理式と呼ぶことにする．$\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_m$ または，$\mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_n$ という表現での $\mathfrak{A}_i$，または $\mathfrak{B}_j$ を，それぞれ，これらの表現に現れる“合接節”または“離接節”と呼ぶことにする．また，表現 $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ において，$\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}$ を，それぞれ，この表現の，“前節”，“後節”と呼ぶことにする．

[2]これらの構成において，構成要素のまとまりを示すのに必要な，あるいは，それ以外の任意の括弧が適宜に付け加えられるものとする．したがって，例えば，$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ が論理式のとき，

$$(\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}) \to \mathfrak{C}, \qquad (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \to \mathfrak{C}, \qquad \text{あるいは} \qquad \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$$

は論理式だが，$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ は論理式ではない．

[3]訳注: これらは，それぞれドイツ語“wahr”，“falsch”の頭文字である．

に，あるいは $(E\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ から，$(E\mathfrak{y})\mathfrak{A}(\mathfrak{y})$ に変形されることをいう．このとき，$\mathfrak{x}$ は，“それに属する量化詞の適用範囲で $\mathfrak{y}$ に書き換えられた” という．

論理式 $\mathfrak{A}$ における，パラメータを持たない論理式変数 $\mathfrak{B}$ への代入とは，$\mathfrak{A}$ に現れる $\mathfrak{B}$ の全てを，同一の論理式 $\mathfrak{C}$ で置き換えることである．このときには，$\mathfrak{A}$ において，論理式変数 $\mathfrak{B}$ に論理式 $\mathfrak{C}$ が代入されたという．

1つ以上のパラメータを持つ論理式変数への代入は，“代入型” の助けを借りて行われる．パラメータを持つ論理式変数の代入型とは，その論理式変数からなる初等論理式で互に異なる自由変数をパラメータとして持つようなもののことである．これらの変数は，代入型の “パラメータ変数” と呼ばれる．

代入型の “派生体” とは，代入型のパラメータ変数のおのおのが，自由個体変数，あるいは束縛個体変数で置き換えられたものをいう．一方，代入型への “代入子” とは，論理式で，その代入型のパラメータ変数が全て現れるようなものをいう[4]．

さて，パラメータを持つ論理式変数への代入の指定は，その論理式変数の1つの代入型に対し代入子が指定され，同時に，そこでこの代入の行われる論理式が指定されることによりなされる．このとき，代入は，この論理式で，代入型の派生体が現れるごとに，これを，代入型からその派生体を得るために行ったのと同じ代入を代入子に施したもので置き換えることにより遂行される．

注意．（パラメータを持つ，あるいは，持たない）論理式変数への代入，あるいは束縛変数の書き換えにより，論理式から再び論理式を得るためには，得られる表現に現れる量化詞の適用範囲に同名の量化詞が生じることがないようにしなければならない．あるいは——もっと手短かないい方をして——“束縛変数の間の衝突” を避けなければならない．

述語計算の導出での，1つの論理式からもう1つの論理式への変形の操作としては，代入と書き換えの他に，述語計算の導出での図式 (α)，(β) も用いられる．

図式 (α) は $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(a)$ の形をした論理式で $\mathfrak{B}(a)$ が変数 x を含んでいないようなものから対応する論理式

$$\mathfrak{A} \to (x)\mathfrak{B}(x)$$

[4]派生体，代入子という用語は（原書 I，§4 での）述語計算のもともとの記述では用いられていなかった．この用語が最初に用いられるのは，それよりずっと後である．

を得るという変形であり，図式 (β) は，$\mathfrak{B}(a) \rightarrow \mathfrak{A}$ の形をした論理式で，$\mathfrak{B}(a)$ が変数 x を含んでいないようなものから対応する論理式 $(Ex)\mathfrak{B}(x) \rightarrow \mathfrak{A}$ を得るという変形である．さらに，両方の図式には，変数 a は $\mathfrak{A}$ にも $\mathfrak{B}(x)$ にも現れないという制限が課される．

注意． 図式 (α)，(β) で，特定の変数 a，x が特別な役割を果たしていることは，代入と書き換えの規則を適用することにより，解除される．これにより，(α)，(β) で a が任意の自由変数で置き換えられ，x が任意の束縛変数で置き換えられたものが得られることになる．

量化詞に関する両図式 (α)，(β) は，ある意味で，次の "基本論理式" の逆行型となっている．

(a) $$(x)A(x) \rightarrow A(a)$$

(b) $$A(a) \rightarrow (Ex)A(x).$$

あと残っているのは，命題計算の図式としての "推論図式" のみであるが，これは，2 つの論理式 $\mathfrak{S}$，$\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}$ から論理式 $\mathfrak{T}$ を得るという変形である．

以上で，やっと導出を次のようにして定義することができることになった: "述語計算の導出" とは，完全に具体的に書き下された（したがって，当然ながら有限の）述語計算の論理式の列で，この列に現れる論理式の全ては以下のどれかの場合に当てはまるようなもののことである:

1. 命題計算で真の論理式，または論理式 (a)，(b) のどちらか;

2. 論理式列の最初の論理式ではなく，1 つ前の論理式から個体変数，あるいは論理式変数への代入か束縛変数の書き換え，あるいは図式 (α)，(β) のいずれかにより得られている;

3. 論理式列の最初の 2 つの論理式でなく，その前の 2 つの論理式から推論図式により得られる;

4. その前に現れる論理式列の中のどれかの論理式と等しい．

導出で，その最後の論理式が $\mathfrak{N}$ であるものは，"論理式 $\mathfrak{N}$ の導出" と呼ばれる．

導出の中の論理式で，1. の場合が当てはまるものは，"初式" と呼ばれる．初式は，導出でその前に現れる論理式から——繰り返し，代入，書き換え，ある

いは図式のどれかの，いずれかによって——得られたものではないということで特徴づけられる．述語計算の導出において初式として用いられえる論理式のことを，述語計算の初式と呼ぶことにする．

したがって，述語計算の初式は，恒真な命題計算の論理式と，基本論理式 (a), (b) からなる．

論理式は，それがある導出の最後の論理式 (“終式”) であるとき，“導出可能” であるという．

導出において許される代入と書き換えのことを，“代入規則” および “書き換え規則” と呼ぶことにする．したがって，これらの規則は，変形の結果として再び論理式が得られる限りにおいて，つまり，束縛変数の間の衝突が起こらない限り，論理式の中の個体変数，または論理式変数への代入，および束縛変数の書き換えが前に規定したようなやり方で行われてよいことを意味する．

ある論理式 $\mathfrak{A}$ から，1 つ以上の代入を次々に施すことにより得られる論理式のことを，略して，$\mathfrak{A}$ から “代入によって得られる” 論理式ということにする．

恒真な論理式から代入によって得られる論理式のことを，“命題論理で恒真な” 論理式という．

導出のうち，初式として恒真な命題計算の論理式のみが用いられ，それ以外には，パラメータを持たない論理式変数への代入規則，および推論図式のみが用いられているようなものを，“命題計算による導出” と呼ぶ．

また，述語計算から束縛変数と，それに関する規則を取り除くことで得られる部分体系を “自由変数をもつ初等計算系” と呼ぶことにする．

2.2　述語計算の形式化された公理体系への応用，ι-規則，数論の形式的体系

述語計算による公理的理論の形式化は，述語計算をこの理論の記号と公理で拡張することによって行われる．これは，より正確には，以下のようになる:

まず，論理式の定義が論理記号以外の記号の導入により，拡張される．ここで問題になるのは，個体記号，関数記号，述語記号といったものである．

注意．　“**関数記号**” とは，“数学的関数記号” の略である．つまり，“数学的関数を表すための記号” ということである．ここで，数学的関数とは，対象領

域の個々の元，あるいは，この関数が $\mathfrak{k}$-変数関数である場合には対象領域の元の $\mathfrak{k}$-組をこの領域の元に対応させるもののことである．これに対し，論理関数は，これらの $\mathfrak{k}$-組を“真”，“偽”のどちらかの値に対応させる．

自由個体変数，個体記号，および関数記号から，以下のような帰納的規定により，“**項**”概念が得られる．自由個体変数は項である．個体記号は項である．関数記号のパラメータの代入場所に，それぞれ項を代入して得られるものは，項である．

項の概念を使って，**初等論理式**の概念が次のように拡張される: 初等論理式は，パラメータを持たない論理式変数であるか，論理式変数のそれぞれのパラメータに項を代入したものか，述語記号のそれぞれのパラメータに項を代入したものである．

この初等論理式の概念から出発して，純粋な述語計算でと同様にして論理式の概念を導入する．この論理式の概念をもとにして，導出が定義され，またこれにより，論理式変数への代入の規則の拡張がなされる．

自由個体変数への代入規則も，ある論理式に現れる特定の自由個体変数を，全て 同一の項で置き換えるものとして拡張される．

一方，導出の定義は，ある特定の幾つかの論理式を“公理”として特別に扱い，これを初式の仲間に入れることによって拡張される．

公理は，それが論理式変数を 1 つも含まないとき，“本来の公理”と呼ばれる．公理の体系は，それが有限個の本来の公理と，場合によっては，さらに等号の公理

$$a = b \to (A(a) \to A(b))$$

からなるとき，“1 階の公理系”と呼ばれる．

述語記号 $=$ と次の 2 つの等号の公理をさらに述語計算に付け加えたものが，一般の論理的体系の形式化として考察される[5]．

$$(J_1) \qquad a = a$$

$$(J_2) \qquad a = b \to (A(a) \to A(b))$$

同様の拡張として，ι-記号と ι-規則の導入による，「... という性質をもつもの」という概念の形式化がある．ι-記号は量化詞と同じように，束縛変数を伴っ

[5]等式 $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ の否定を $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ と書くことにする．

て現れる．形式的には，ι-記号の適用により，自由変数 $\mathfrak{c}$ を含み，束縛変数 $\mathfrak{x}$ は含んでいないような論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{c})$ から，$\iota_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ という表現を得る．

ι-規則は以下のようになものである: 論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{c})$ に対し，“一意性論理式”

$$(E\mathfrak{x})A(\mathfrak{x}), \qquad (\mathfrak{x})(\mathfrak{y})(A(\mathfrak{x})\,\&\,A(\mathfrak{y}) \rightarrow \mathfrak{x}=\mathfrak{y})$$

が導出されるとき，$\iota_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ を “項” として用いることができて，$\mathfrak{A}^*(\mathfrak{x})$ が，束縛変数の書き換えを除いて $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ と等しい論理式なら，論理式 $\mathfrak{A}(\iota_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}^*(\mathfrak{x}))$ を初式として用いることができる[6]．ι-記号の束縛変数にも，他の量化詞と同じように，書き換え規則が適用される．

論理式の構成，あるいは代入，書き換えの際に必要になる束縛変数の間の衝突の回避は，量化詞 $(\mathfrak{x})$，$(E\mathfrak{x})$ あるいは $\iota_{\mathfrak{x}}\mathfrak{C}(\mathfrak{x})$ という表現は，同じ変数 $\mathfrak{x}$ による記号 $(\mathfrak{x})$，$(E\mathfrak{x})$，$\iota_{\mathfrak{x}}$ の適用範囲に現れてはならないというように拡張される．

$\iota_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ という形をした項を，“ι-項” と呼ぶ．ι-記号を含まない論理式の ι-規則が用られた導出は，ι-記号をまったく用いない導出に書き換えることができる[7]という ι-規則の除去可能性定理が成立する (原書 I，§8 で証明されている)．

計算体系に対して，あるいは，証明論的考察に対して使いやすい形の，拡張された ι-規則は，（自由変数 $\mathfrak{c}$ を含み束縛変数 $\mathfrak{x}$ を含んでいない）論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{c})$ による表現 $\iota_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ を項として認め，“ι-公理” として，論理式

$$(Ex)(y)(\mathfrak{A}(y) \sim y=x) \rightarrow \mathfrak{A}(\iota_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))$$

を採用するというものである．このとき，前出の ι-規則は，導出可能な規則となる．この拡張された ι-規則においても，論理学の公理以外の初式（本来の公理）と終式に ι-記号が含まれていないような導出の全てに対して ι-記号の除去可能性が成り立つ．

実際の論理の形式化による演繹的形式体系の拡張で，しかし本質的な拡張にはなっていないものとしては，他に，唯名的定義の形式化であるところの “顕

[6] ここでの ι-規則の記述の，原書 I，§8，393 ページでの記述と異なっている点は，そこでは特定の変数 x，y が用いられていたのに対し，ここでは，任意の変数 $\mathfrak{x}$，$\mathfrak{y}$ が許されていることである．しかし，この規則は，束縛変数の書き換え規則により，以前の規則と同等なものとなる．

[7] この導出が本来の公理を含むときには，もちろん，これらの公理が ι-記号を含まないことを仮定しなければならない．

現的定義" があげられる[8]．顕現的定義とは，演繹的形式体系に付け加えられる公理で，個体記号あるいは関数記号を導入する等式，あるいは述語記号を導入する同値論理式である．この等式あるいは同値論理式の左辺には導入される記号が，互いに異なる自由変数をパラメータとして伴って置かれ，右辺には，左辺と同じ自由変数を持ち拡張前の形式的体系での記号のみが現れるような表現（"定義表現"）が置かれる．この表現は等式の場合には項で同値論理式の場合には論理式である．

導入される記号は，論理式変数をパラメータとして持つこともできる．顕現的定義で導入される記号に論理式変数がパラメータとして現れるときには，その論理式変数のパラメータの代入場所に互いに異なる束縛変数を代入して，これらの束縛変数も導入される記号の添数として書き添えられる．

顕現的定義で特徴的なのは，顕現的定義により導入された記号を含まない論理式の顕現的定義を用いた導出から，常に顕現的定義を除去することができるということである．このためには，単に以下の代入規定に従えばよいからである: 全ての導入された記号について，それが個体記号なら，その定義の表現で置き換え，パラメータを持つ記号なら，その定義の表現の各パラメータ変数に記号での対応するパラメータを代入したもので置き換える．必要に応じては，束縛変数の衝突を避けるための書き換えを行う．

顕現的定義と区別しなければならないのは，**数論の形式的体系**で現れる**帰納的定義**である．数論の形式的体系とは，数論の形式化を含んでいる体系のことである．0 を最初の自然数を表す個体記号として，1 つの数に対し，その次の数を対応させる関数を表す関数記号としてダッシュを用いる．0 とダッシュからつくられる 0，$0'''$ といった項のことを，"数表記" と呼ぶことにする．普通に用いられる数の記号は

$$1 = 0', \qquad 3 = 0'''$$

といった顕現的定義により導入することができる．

自然数の構造により，変数と関数の値が（0 から始まる）自然数であるような関数（このような関数を "数論的関数" と呼ぶことにする）の独特な定義の仕方が可能になる．つまり，数論的関数は，その変数に対して，あるいは多変

[8]訳注: 本書の訳では，„explizit“（英語の "explicit"）に対し，"顕現的" というかなり苦しい訳語を当てている．

数関数の場合には1つの選ばれた変数に対して，与えられた数に対する関数の値をその数より小さいところでの関数の値に依存する形での定義することにより，導入することができる．この際，さらに，0での関数値，あるいは，上で選んだ変数が0のときの関数の形を与える必要がある．

このような定義を帰納的定義と呼ぶ．帰納的定義のうち，最も簡単な，しかし，中心的なものは[9]，“原始帰納”により，あるいは，もう少し一般におのおのが新しい1変数，あるいは多変数の関数を導入するような原始帰納の列により，実現される．原始帰納とは次のような形をした帰納等式の組である．

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_\mathfrak{l}, 0) = \mathfrak{a}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_\mathfrak{l})$$
$$\mathfrak{f}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_\mathfrak{l}, n') = \mathfrak{b}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_\mathfrak{l}, n, \mathfrak{f}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_\mathfrak{l}, n)).$$

ここに，$\mathfrak{f}(\ldots)$ は導入されるべき関数記号で，$\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_\mathfrak{l}$ は自由変数（帰納のパラメータ）であり[10]，

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_\mathfrak{l}), \qquad \mathfrak{b}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_\mathfrak{l}, n, m)$$

は，表示された個体変数（ただし全部本当に現れなくてもよい），0とダッシュ以外では，すでにそれまでに原始帰納により導入された関数記号のみをその構成要素として含んでいるような項である．

特に，このような形をしたものに，和と積の帰納等式がある

$$a + 0 = a \qquad\qquad a \cdot 0 = 0$$
$$a + n' = (a + n)' \qquad\qquad a \cdot n' = a \cdot n + a.$$

このうち，最初の組では独立で，次の組では最初の組に依存して，帰納的定義が与えられている．

原始帰納あるいは，原始帰納のひとつながりの組み合わせにより導入される関数を，略して“帰納的関数”と呼ぶことにする．

帰納的定義は，意味としては関数の計算方法と解釈できる．実際，帰納的定義は等号の公理と組み合わせることにより，以下のような帰納関数の形式的な計算方法を与える．$\mathfrak{f}(n_1, \ldots, n_\mathfrak{r})$ が帰納的関数のとき，任意の数表記の組み合わせ $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r}$ に対し，$\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r}$ での値が数表記 $\mathfrak{n}$ で表されるとき，

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r}) = \mathfrak{n}$$

---

[9]原書 I，287–292ページおよび331ページ上参照．

[10]変数 $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_\mathfrak{l}$，$n$ は互いに異なっていなければならない．

がその帰納的関数の定義と等号の公理から導出される．この導出は自由変数を持つ初等計算系でできる．

任意の帰納等式の導入を認める規則を“原始帰納の図式”と呼ぶ．

数論に特有の定義法としての帰納的定義の方法に対し，数論に特有の推論法として，“完全帰納法”(“n から $n+1$ への推論”) がある．この推論原理の形式化は，次の“帰納法図式”により与えられる:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{A}(0)\\ \mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(a')\end{array}}{\mathfrak{A}(a)},$$

ここに，論理式 $\mathfrak{A}(0)$ には，変数 a は現れないものとする．

自由変数を持つ初等計算系に原始帰納の図式と帰納法図式，それに，等号の公理と $0' \neq 0$ という公理を付加したものは“帰納的数論”の形式的体系を与える．

述語計算のもとでは，帰納法図式は，次の“帰納法の公理”と同等になる[11]．

$$A(0)\,\&\,(x)(A(x) \to A(x')) \to A(a)$$

等号の公理 (J_2) と，次の 2 つの公理

$$(P_1)\qquad a' \neq 0$$

$$(P_2)\qquad a' = b' \to a = b,$$

和と積の帰納等式，および帰納法の公理からなる数論的公理系を，“公理系 (Z)”と呼ぶことにする．述語計算に公理系 (Z) の記号と公理を加えてできる形式的体系を，“公理系 (Z) の形式的体系”，あるいは略して“体系 (Z)”と呼ぶことにする．

(記号 0 とダッシュの導入と) 公理 (P_1)，(P_2)，および帰納法の公理により，ペアノにならってデデキントが導入した数論の公理が形式化されたことになる．それゆえ，これらの公理を“ペアノの公理”と呼ぶことにする．

形式的体系 (Z) に ι-規則を加えたものでの数論の演繹的展開には，“μ-記号”の次の顕現的定義による導入が本質的な役割を果たす．

$$\mu_x A(x) = \iota_x\{((z)\overline{A(z)} \to x = 0)\,\&\,((E\,z)A(z) \to A(x)\,\&\,(u)(A(u) \to x \leq u))\}.$$

---

[11] 原書 I，256–266 ページ参照.

このためには，まず，右辺に現れる ι-項を ι-規則に従って導入しなければならない[12]．このために導出しなければならなくなる一意性論理式は，論理式

$$A(a) \to (Ex)(A(x) \,\&\, (y)(A(y) \to x \leq y)).$$

により得られる．この式は，“最小数の原理”，つまり「どんな数に関する性質に対してもそれを満たす数が存在するなら，それを満たす最小の数が存在する」という原理の形式化になっている．

この論理式は，顕現的定義[13]

$$a \leq b \sim (E\,x)(a + x = b)$$

により，帰納法の公理と公理

$$(J_2), \quad a + 0 = a, \quad a + n' = (a + n)', \quad a' = b' \to a = b$$

により導出可能である．$\mu_x A(x)$ の顕現的定義から ι-規則により，次の論理式が導かれる．

(μ_1) $$(Ex)A(x) \to A(\mu_x A(x))$$

(μ_2) $$A(a) \to \mu_x A(x) \leq a$$

(μ_3) $$(x)\overline{A(x)} \to \mu_x A(x) = 0.$$

意味としては，任意の数に関する性質 $\mathfrak{A}(a)$ に対し，項 $\mu_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ により，この性質を満たす数が存在するときにはそのうちの最小数の表現となり，そうでない場合には 0 が，μ-記号により表現される，と解釈できる．

公理系 (Z) の形式的体系では，(原書 I, §7 で詳説されるように) 和と積の帰納的定義は，顕現的定義のように代入によって除去することはできない．しかし，体系 (Z) でのそれ以外の原始帰納による関数の定義は ι-記号の導入により顕現的定義に帰着させることができる．つまり，帰納的に導入された関数記号は，その帰納的定義の代わりに，もとの帰納的定義がそれから導出可能にな

---

[12] 原書 I，403 ページ下から 405 ページ参照．

[13] 原書 I では，ここでの顕現的定義の代わりに

$$a < b \sim (Ex)(x \neq 0 \,\&\, a + x = b), \qquad a \leq b \sim a = b \vee a < b$$

という定義が用いられていた（366 ページと 293 ページ参照）．ここでの定義で “$a \leq b$” と同値なものとして用いられているものは，原書 I での定義から導出可能な論理式となる．

るような顕現的定義で導入することができる[14]．この顕現的定義は，μ-記号を使って得られる．

この帰納的定義が顕現的定義に帰着できることから，ι-規則の除去可能性定理により，以下の意味での，形式的体系 (Z) における帰納的定義の“代行可能性”が成り立つ．全ての帰納的関数 $\mathfrak{f}(n_1, \ldots, n_\mathfrak{r})$ に対し，形式的体系 (Z) での記号と個体変数からなる論理式 $\mathfrak{F}(n_1, \ldots, n_\mathfrak{r}, n)$ で $n_1, \ldots, n_\mathfrak{r}$，$n$ がそこに現れる自由変数であるようなものが対応して，全ての数表記 $\mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_\mathfrak{r}$，$\mathfrak{k}$ に対し，論理式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_\mathfrak{r}, \mathfrak{k})$ か，その否定が形式的体系 (Z) で証明でき，同値論理式

$$\mathfrak{f}(n_1, \ldots, n_\mathfrak{r}) = n \sim \mathfrak{F}(n_1, \ldots, n_\mathfrak{r}, n),$$

および $\mathfrak{f}(n_1, \ldots, n_\mathfrak{r})$ の帰納的定義の中に他の帰納的関数が現れる場合には，これらに対応する同値論理式により——これらの同値論理式を公理として形式的体系に付け加えるとき—— $\mathfrak{f}(n_1, \ldots, n_\mathfrak{r})$ の帰納等式は，導出可能となる．

例えば，これは，帰納等式

$$\varphi(a, 0) = \mathfrak{a}(a)$$
$$\varphi(a, n') = \mathfrak{b}(a, n, \varphi(a, n))$$

では，次のようになる．$\mathfrak{a}(c)$ と $\mathfrak{b}(c, d, m)$ という項は体系 (Z) の論理式 $\mathfrak{A}(c, k)$，$\mathfrak{B}(c, d, m, k)$ に対応し，同様に，2 変数関数 φ は論理式 $\mathfrak{G}(a, b, k)$ に対応する．この対応は，同値論理式

$$\mathfrak{A}(c, k) \sim \mathfrak{a}(c) = k$$
$$\mathfrak{B}(c, d, m, k) \sim \mathfrak{b}(c, d, m) = k$$
$$\mathfrak{G}(a, b, k) \sim \varphi(a, b) = k$$

の意味で成立していて，帰納的定義が体系 (Z) に付け加えられたときには，これらの同値論理式が証明可能になる．体系 (Z) 自身の中では，帰納等式に対応して次の論理式が導出可能となる:

$$\mathfrak{G}(a, 0, c) \sim \mathfrak{A}(a, c)$$
$$\mathfrak{G}(a, n, b) \rightarrow (\mathfrak{G}(a, n', c) \sim \mathfrak{B}(a, n, b, c)).$$

[14] これについては，原書 I，421–430 ページ参照．

演繹的体系は，この体系で，片方の論理式が，もう一方の論理式の否定になっているような 2 つの論理式 $\mathfrak{A}$, $\bar{\mathfrak{A}}$ が導出されないとき，**無矛盾**であるという．恒真な論理式 $A \to (\bar{A} \to B)$ により，どの論理式の組 $\mathfrak{A}$, $\bar{\mathfrak{A}}$ からも，任意の論理式が導出されるようになる．したがって，我々の述語計算を含むある形式的体系の無矛盾性を示すには，ある選ばれた論理式について，それが形式的体系で導出可能でないことを示すことができれば十分である．

2.3　述語計算に関する定理

述語計算と，述語計算から，個体記号，述語記号，関数記号および公理を加えて得られる（B でも述べたような）形式的体系[15]（ただし，ι-記号はここには含まれていない）に関する幾つかの概念と事実をまとめておく[16]．

1. 論理式 $\mathfrak{A}$ は，同値論理式 $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ が導出可能なとき，論理式 $\mathfrak{B}$ と“同値になる”という．これは，含意論理式 $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ の両方が導出可能であることと同じである．

2. 任意の論理式は“冠頭型”論理式，つまり，そこに現れる全ての量化詞が論理式の初めの部分にあり，適用範囲が論理式の終わりのところまで及んでいるような論理式と同値になる．

3. 論理式 $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ は，$\mathfrak{A}$ を初式として採用することにより $\mathfrak{B}$ が導出可能となり，$\mathfrak{B}$ を初式として採用することにより，$\mathfrak{A}$ が導出可能となる——これを簡略化して $\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{A}$ から導出可能で，$\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{B}$ から導出可能であるといういい方をすることにする——とき，“演繹的に同値”であるという．

4. 全ての論理式は，そこに現れる自由個体変数の 1 つ 1 つを，まだ使われていない束縛変数で書き換えていき，そうして導入された束縛変数に属す全称記号を（任意の順序で）論理式の初めのところに付け加え（それらの全称記号の適用範囲が論理式の最後までになるようにし）たものと，演繹的に同値となる．論理式を，このような演繹的に同値な論理式に変形することを，“自由変数の束縛変数への取り替え”と呼ぶ．これの逆の変換で，論理式の全称記号を取り去って，それに属する束縛変数をその前にまだ使われていない自由変数で置き換え

---

[15] 以下では形式的体系に対する，この制限は，毎回繰り返さない．

[16] 以下に述べることについては，原書 I の 132, 139–142, 148–163, 199, 220–227, 230–232, 382–384 ページ参照．

ることを，同様に“束縛変数の自由変数への取り替え”と呼ぶ．

5. 全ての論理式は，“スコーレム標準型”，つまり，冠頭型で，初めのところに現れる量化詞のうち全称記号が存在記号より前にこないようなものと演繹的に同値になる[17]．

6. 次の“演繹定理”が成り立つ．論理式 $\mathfrak{A}$ から，$\mathfrak{A}$ が自由変数を含むなら，それらを保存して，つまり，それらに代入，または図式 (α)，(β) のいずれも適用することなく，論理式 $\mathfrak{B}$ が導出可能なら，論理式 $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ が 論理式 $\mathfrak{A}$ を用いずに導出可能である．

7. 論理式変数を含まない論理式の導出では，等号の公理 (J_2)，つまり，論理式

$$a = b \to (A(a) \to B(b))$$

は，以下の形をした，有限個の本来の公理で置き換えることができる．

$$a = b \to (\mathfrak{P}(a) \to \mathfrak{P}(b))$$
$$a = b \to \mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}(b).$$

ここに，$\mathfrak{P}$ は，そこでの形式的体系の述語記号で，$\mathfrak{f}$ は，そこでの関数記号である．これらは，明記されたパラメータ以外にも他のパラメータを含んでいてよく，それらには，a，b とは異なり，互いにも異なる個体変数が入っているとする．

このような形をした論理式は，その述語記号，あるいは，関数記号の指定されたパラメータに“対応する”（あるいは“属する”）“特殊な形の同等性論理式”と呼ぶことにする．

（述語記号あるいは関数記号と，その 1 つのパラメータを指定することにより，他のパラメータが存在する場合には，そこに代入される自由変数の選択を除いて，このような論理式は一意に決まる．）

特に，

$$a = b \to (a = c \to b = c)$$

は，

---

[17] このスコーレム標準型は“証明論的”なものであり，これと双対の（つまり，このような論理式での全称記号と存在記号の役割を交換することにより得られる）“意味理論的スコーレム標準型”とは異なる（252 ページ参照）．

$$a = b \to (\mathfrak{P}(a) \to \mathfrak{P}(b))$$

の特別な場合として含まれることになる．

8. 全ての導出は“証明糸”に分解される．終式から初めて，繰り返し，代入，書き換え，あるいは図式 (α)，(β) に得られたおのおのの論理式の上に該当する論理式を置き，推論図式の終式の上にこの終式を得るのに使った論理式の組を対応がわかるように置くことで，“証明図”が得られる．

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A} & & \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \\ \backslash & & / \\ & \mathfrak{B} & \end{array}$$

このようにして得られた図に現れる論理式は，一般には導出の対応する論理式に 1 対 1 対応しない．導出の中の同一の論理式が証明図の幾つもの場所に現れることがありうるからである．初式の上には論理式は置かれず，推論図式の終式の上には 2 つの論理式が置かれる（ここで上方向への分岐が起こることになる）．他の論理式の上には，それぞれ 1 つの論理式が置かれることになる．初式から始まって，導出の終式でない論理式については，証明図でその論理式のすぐ下に置かれる論理式が続くような論理式の列が，“証明糸”と呼ばれる．

9. 導出の証明糸への分解の方法を用いることにより，全ての導出での代入を“初式に引き戻す”ことができる．つまり，ある導出から初式あるいは，初式から， 1 つ以上の代入を次々に施すことにより得られた論理式にのみに，代入が適用されているような，導出を得ることができる．ただし，ここで，図式 (α)，(β) における変数 a の代わりに，他の個体変数を使うことも許すことが必要になる．

2.4　述語計算の変種型

代入を初式へ引き戻すことが可能であることから，それぞれの形式的体系の，もともとの初式の他に，それらから 1 つの，あるいは幾つかの代入を施すことにより得られる論理式の全ても初式として加え，さらに，図式 (α)，(β) で特定の変数 a のみの使用をやめることにより，**代入規則を行わずに**すませることが可能になる．

特に，これにより，論理式変数を持たないような論理式の集まりからの導出

では，論理式変数を削除することができ，したがって，公理的理論の形式的演繹の扱いには**論理式変数をまったく用いず**に行うことができる．

このときには，恒真な命題計算の論理式は初式として用いることができるという規則は，恒真な命題計算の論理式から代入により得られる論理式は初式として用いることができるというように変更される．さらに，基本論理式 (a), (b) の代わりに，論理式図式

$$(x)\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{t}), \qquad \mathfrak{A}(\mathfrak{t}) \rightarrow (Ex)\mathfrak{A}(x)$$

が用いられる．ここに，$\mathfrak{t}$ はある項を表す．また，公理の代わりに公理図式が用いられる．ここにおいて，前には自由個体変数だったところに，任意の項が書き込まれ，前には論理式変数であったところは任意の論理式で置き換えられる．例えば，図式

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$$

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{s} \rightarrow (\mathfrak{A}(\mathfrak{r}) \rightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{s}))$$

が，等式の公理の代わりに用いられる．ここに，$\mathfrak{r}$，$\mathfrak{s}$，$\mathfrak{t}$ は任意の項を表している．

しかしながら，ここでも，個体変数記号を公理の中に残すことが可能で，特に，そうすることで，代入の規則は付加しなくても，本来の公理を図式で置き換えないですますことができる．つまり，論理式図式 $(x)\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ と図式 (α) の変形

$$\frac{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{c})}{\mathfrak{A} \rightarrow (x)\mathfrak{B}(x)}$$

（ここに $\mathfrak{c}$ は $\mathfrak{A}$ にも $\mathfrak{B}(x)$ にも現れないような任意の自由個体変数とする）により，自由個体変数への代入規則を導出可能な規則として得ることができる．すなわち，自由変数 $\mathfrak{a}$ を持つ論理式 $\mathfrak{C}(\mathfrak{a})$ から，任意の項 $\mathfrak{t}$ に対し論理式 $\mathfrak{C}(\mathfrak{t})$ を導くことができる．これは以下のようにしてできる．

まず $\mathfrak{C}(\mathfrak{a})$ が変数 x を含んでいない場合について考えてみよう．任意の導出可能な論理式 $\mathfrak{P}$ (例えば $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ の形をしているもの) で，変数 $\mathfrak{a}$ を含まないものを選ぶ．この論理式によりつくられる論理式 $\mathfrak{C}(\mathfrak{a}) \rightarrow (\mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{C}(\mathfrak{a}))$ は，恒真な論理式 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ から代入により得られるから，初式として用いることができる．この論理式を $\mathfrak{C}(\mathfrak{a})$ とともに推論図式で用いることにより，論

理式 $\mathfrak{P} \to \mathfrak{C}(\mathfrak{a})$ が得られる．$\mathfrak{P}$ は変数 $\mathfrak{a}$ を含んでいなかったから，この論理式に図式 (α) を適用して $\mathfrak{P} \to (x)\mathfrak{C}(x)$ が得られる．一方，全称記号の論理式図式により，論理式 $(x)\mathfrak{C}(x) \to \mathfrak{C}(\mathfrak{t})$ が得られる．この両方の論理式と，$\mathfrak{P}$ が導出可能であることと，推論図式を2回適用することにより，論理式 $\mathfrak{C}(\mathfrak{t})$ が得られる．

論理式 $\mathfrak{C}(\mathfrak{a})$ が変数 x を含んでいる場合には，まず，x を $\mathfrak{C}(\mathfrak{a})$ に現れない束縛変数に書き換えることで，論理式 $\mathfrak{C}^*(\mathfrak{a})$ に移行する．$\mathfrak{C}^*(\mathfrak{a})$ から，前記のようにして，$\mathfrak{C}^*(\mathfrak{t})$ が得られるが，ここに現れる x の代わりに用いた変数を書き換えることで，$\mathfrak{C}(\mathfrak{t})$ が得られる．

余談ながら，量化詞の図式で変数 x を指定しないことで，束縛変数の書き換えを導出可能な規則とすることができる．このときには，2つの論理式図式は

$$(\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{t}), \qquad \mathfrak{A}(\mathfrak{t}) \to (E\,\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$$

のようになり，図式 (α)，(β) は

$$\frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathfrak{c})}{\mathfrak{A} \to (\mathfrak{x})\mathfrak{B}(\mathfrak{x})}, \qquad \frac{\mathfrak{B}(\mathfrak{c}) \to \mathfrak{A}}{(E\,\mathfrak{x})\mathfrak{B}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{A}}$$

となる．ここに，自由変数 $\mathfrak{c}$ と束縛変数 $\mathfrak{x}$ は，$\mathfrak{c}$ は $\mathfrak{A}$ にも $\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$ にも現れず，$\mathfrak{x}$ は $\mathfrak{B}(\mathfrak{c})$ に現れない，という条件を満たしているものとする．

実際に，これらの図式により

$$(\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \to (\mathfrak{y})\mathfrak{A}(\mathfrak{y}),$$

および

$$(E\,\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \to (E\,\mathfrak{y})\mathfrak{A}(\mathfrak{y})$$

の形をした任意の論理式が導出できるようになることから，これらの図式を採用することで，書き換え規則が導出可能な規則となることがわかる．

例えば，

$$(E\,\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \to (E\,\mathfrak{y})\mathfrak{A}(\mathfrak{y})$$

という論理式を導出するには，まず，$\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ に現れない自由個体変数 $\mathfrak{c}$ をとる．存在記号に関する図式から，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{c}) \to (E\,\mathfrak{y})\mathfrak{A}(\mathfrak{y})$$

が導かれるが，これから図式 (β) の変形により，

$$(E\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \to (E\mathfrak{y})\mathfrak{A}(\mathfrak{y})$$

が得られる．

以上により，次のような述語計算の改変版が得られたことになる．初式として許されるのは，

1. 恒真な命題計算の論理式から代入により得られる論理式，
2. 量化詞に関する 2 つの論理式図式から得られる論理式，
3. 本来の公理と公理図式から得られる論理式

であり，初式，あるいは，すでに得られている論理式から導出される論理式への移行は，図式 (α)，(β) の変形と推論図式のみにより行われる．

最後に，**自由個体変数の代入規則と束縛変数の書き換え規則はそのままにして論理式変数だけを削除する**ことも可能であることを注意しておこう．このときには，論理式変数を含む初式の代わりに，それに相当する論理式変数を論理式を表すアルファベットで置き換えて得られる論理式図式が用いられることになる．特に，基本論理式 (a)，(b) の代わりに，論理式図式

$$(x)\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{A}(a), \qquad \mathfrak{A}(a) \to (Ex)\mathfrak{A}(x)$$

が，また，等号の公理 (J_2) の代わりに図式

$$a = b \to (\mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(b))$$

が用いられる．しかし，その他の点ではもとの形式のままである．

第3章 ヒルベルトの ε-記号による束縛変数の除去

3.1 存在論理式の形式的除去法

数理論理学体系の研究は原書 I で述べた範囲では，用いられる束縛変数が 1 種類，つまり束縛個体変数に限られるような，“1 階の論理” の枠組みの中で行われた[1]．

この枠組みの中での論理計算として，フレーゲとラッセルに倣って “述語計算” が定義され，これの拡張として，同一性の定式化である等号の公理と “... という性質を持つところのもの” という概念の定式化であるところの “ι-規則”[2]が付け加えられた[3]．

この計算体系と，そこで公理化された理論に対する演繹的な扱いについては，原書 I で，すでに詳細に考察した．しかし，そこでは幾つかの根本的な問題が残されたままになっていた．特に形式的公理体系 “(Z)”[4]により，数論が自然数での非構成的証明法（tertium non datur）を含めて，述語計算の枠組みの中で定式化されるわけだが，これに対する無矛盾性の証明がされていなかった．また，存在公理は，関数記号や個体記号の導入によって，どの程度まで不要なものにできるのかという問題も残っていた．後者の問題を議論することは，同時にヒルベルトが数論の形式的体系の無矛盾性証明の証明方針となると考えた手

---

[1]公理体系との関連で “1 階の論理” というときには（原書 I，§4，154 ページ参照），1 階の論理の公理体系は，論理式変数を持たない論理式，つまり “本来の公理”（原書 I，§8，432 ページ参照）のみからなるという狭義の意味で考えることにする．

[2]原書 I，393 ページ，および本書第 2 章，29 ページ参照．

[3]この形式的体系の記法と規則をまとめたものは，本書第 2 章，23 ページにある．

[4]原書 I，380 ページ参照．〔訳注: 本書第 2 章，33 ページを参照.〕

法を，説明することにもなる．したがって，ここではこの問題を先に考察することにする．

問題点をはっきりとさせるために，まず今までに得られている結果からすでに結論が導き出せるような特殊例を考察することから始めよう．

等号の公理を含む公理系 $\mathfrak{S}$ が，

$$(Ex)\mathfrak{A}(a, \ldots, k, x)$$

の形をした存在公理を含むものとする．ここで，自由変数は $a, \ldots, k$ 以外には現れないものとする．さらに，

$$(x)(y)(\mathfrak{A}(a, \ldots, k, x) \,\&\, \mathfrak{A}(a, \ldots, k, y) \rightarrow x = y)$$

が公理系 $\mathfrak{S}$ から導かれるものとする．(これの特殊な場合としては，この論理式が，すでに $\mathfrak{S}$ に含まれていることもありうる．)

このときには，ι-規則により，

$$\iota_x\mathfrak{A}(a, \ldots, k, x)$$

という項を付け足して，

$$\mathfrak{A}(a, \ldots, k, \iota_x\mathfrak{A}(a, \ldots, k, x))$$

を初式の1つとして用いることができた．さらに，関数記号 $\mathfrak{f}(a, \ldots, k)$ を

$$\mathfrak{f}(a, \ldots, k) = \iota_x\mathfrak{A}(a, \ldots, k, x)$$

により定義して，導入することにより，

$$\mathfrak{A}(a, \ldots, k, \mathfrak{f}(a, \ldots, k))$$

という論理式が得られ，この論理式で，公理

$$(Ex)\mathfrak{A}(a, \ldots, k, x)$$

を置き換えることができる．述語計算の基本論理式 (b) により，$\mathfrak{A}(a, \ldots, k, \mathfrak{f}(a, \ldots, k))$ から，$(Ex)\mathfrak{A}(a, \ldots, k, x)$ がただちに導かれるからである．

このようにして，$\mathfrak{S}$ において関数記号 $\mathfrak{f}(a, \ldots, k)$ を付け加えて，$(Ex)\mathfrak{A}(a, \ldots, k, x)$ の代わりに

$$\mathfrak{A}(a, \ldots, k, \mathfrak{f}(a, \ldots, k))$$

という論理式を公理として採用することにより，新しい公理系 $\mathfrak{S}'$ が得られる．

公理系 $\mathfrak{S}$ から $\mathfrak{S}'$ への移行は，ι-規則を介して行われたので，逆に ι-記号の一般的除去法[5]により，$\mathfrak{S}'$ から $\mathfrak{S}$ に戻ることもできる．したがって $\mathfrak{S}'$ と $\mathfrak{S}$ の間には，以下の意味での同値性が成り立つ．

体系 $\mathfrak{S}'$ の言語上の論理式は，$\mathfrak{S}'$ の公理により関数記号 $\mathfrak{f}$ を含まない．したがって，$\mathfrak{S}$ の言語上の論理式に変形できる．さらに，関数記号 $\mathfrak{f}$ を含まず，体系 $\mathfrak{S}'$ から導出できる全ての論理式は，体系 $\mathfrak{S}$ からも導き出せる．

この意味で，存在公理

$$(Ex)\,\mathfrak{A}(a, \ldots, k, x)$$

は，公理

$$\mathfrak{A}(a, \ldots, k, \mathfrak{f}(a, \ldots, k))$$

で置き換えられるということができる．別の言い方をすれば，関数記号 $\mathfrak{f}(a, \ldots, k)$ の導入により，この存在公理は不要になる．

以上の結果を得るために用いた手法は，ここで考察したケースの特殊な前提条件に依存していた．ι-規則が適応できるのは，考察の対象となっている形式的体系の中で，

$$(x)(y)(\,\mathfrak{A}(a, \ldots, k, x)\,\&\,\mathfrak{A}(a, \ldots, k, y) \;\rightarrow\; x = y)$$

という論理式が，初式の 1 つであるか，または導出可能な論理式であるかのいずれかの場合に限られているからである．

それでは，この前提条件なしでは同様な結果を得ることはできないのかと考えたくなる．

パラメータを持たない存在命題は，自由変数を持たない論理式

$$(E\,\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$$

に相当するが，この場合は，原書 I, §4 で演繹定理の応用を述べたところ[6]での考察により，すでに肯定的に解かれていた．そこでは，“$\mathfrak{A}(x)$ を満たすような x が存在する” という存在定理が証明されたところで，個体記号 $\mathfrak{s}$ を導入して，

[5]原書 I，§8，431–451 ページ参照．ただし，ここでの議論は，以下の導入のために述べているにすぎないので，証明の細部がわからなくても気にしないでよい．

[6]原書 I，§4，156–157 ページ参照．

“そこで $\mathfrak{s}$ を性質 $\mathfrak{A}$ を満たすようなものとして...” と続けるという推論法を考察したが，これは形式的には，$\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$ という論理式を初式として付け加えることであった．

この推論法は，そこで演繹定理を使って証明したように，記号 $\mathfrak{s}$ を含まない論理式に対しては，新たな証明の可能性を何も与えない，つまり記号 $\mathfrak{s}$ を含まない論理式が，この記号と論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$ を用いて導出できるなら，この記号を用いなくても導出可能である．さらに，$\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$ を用いて導出可能な $\mathfrak{B}(\mathfrak{s})$ という形の論理式に対しては，$\mathfrak{c}$ を $\mathfrak{B}(\mathfrak{s})$ に現れない変数とするとき，論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{c}) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{c})$$

が，記号 $\mathfrak{s}$ を用いることなく導出できる．具体的には，これの導出は，$\mathfrak{B}(\mathfrak{s})$ の導出の中に現れる記号 $\mathfrak{s}$ を全て $\mathfrak{c}$ で置き換え，導出に現れる論理式のおのおのの初めに $\mathfrak{A}\rightarrow$ を付け加え，さらに演繹定理の証拠で示したように[7]，証明のつじつまを合わせるために適当な短い証明の断片を要所に挿入することで得られた．

つまり，論理式 $(E\,\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ が導出可能なとき，$\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$ を用いての導出と，それに対応する記号 $\mathfrak{s}$ の現れない導出との間には，任意の導出の結果 $\mathfrak{B}(\mathfrak{s})$ に対し，($\mathfrak{B}(\mathfrak{s})$ に現れない自由変数 $\mathfrak{c}$ の選択を除いて一意に決まるところの）論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{c}) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{c})$$

が対応し，記号 $\mathfrak{s}$ を含まないような，任意の帰結 $\mathfrak{B}$ には $\mathfrak{B}$ 自身が対応するという意味における完璧な照応が得られる．

論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{c}) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{c})$ は，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$ を用いたとしても，論理式 $\mathfrak{B}(\mathfrak{s})$ とは演繹的に同値とはならないが，代入と推論規則を用いることにより，この式と $\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$ から，ただちに $\mathfrak{B}(\mathfrak{s})$ が得られる．

この結果は，ただちに多数の存在記号が先頭に並んでいるような形の論理式

$$(E\,\mathfrak{x}_1)\dots(E\,\mathfrak{x}_\mathfrak{r})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r})$$

で，自由変数を含まない（しかし，場合によっては，$\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}$ 以外の束縛変数も含むような）ものに対しても拡張できる．

---

[7]原書 I，§4，150–152 ページ参照．

このような論理式が，初式の1つであるか，または証明できる論理式である場合には，個体記号 $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_\mathfrak{r}$ と論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_\mathfrak{r})$$

を導入しても，体系は本質的には何の拡張も受けない．$\mathfrak{A}(\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_\mathfrak{r})$ を用いて導出可能な論理式

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_1}, \ldots, \mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_\mathfrak{p}})$$

（ただし，$\mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_1}, \ldots, \mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_\mathfrak{p}}$ は $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_\mathfrak{r}$ のうちの幾つかとする）は，記号 $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_\mathfrak{r}$ を用いずに導出可能な論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_\mathfrak{r}) \to \mathfrak{B}(\mathfrak{c}_{\mathfrak{n}_1}, \ldots, \mathfrak{c}_{\mathfrak{n}_\mathfrak{p}})$$

に対応する．ここに，$\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_\mathfrak{r}$ は $\mathfrak{B}(\mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_1}, \ldots, \mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_\mathfrak{p}})$ に現れない自由変数である．また，この論理式の導出は $\mathfrak{B}(\mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_1}, \ldots, \mathfrak{s}_{\mathfrak{n}_\mathfrak{p}})$ の導出とまったく同様にできる．さらに，論理式 $\mathfrak{B}$ が記号 $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_\mathfrak{r}$ のどれも含んでいないときには，これが $\mathfrak{A}(\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_\mathfrak{r})$ を用いて導出できれば，これを用いずに（つまり，記号 $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_\mathfrak{r}$ を用いずに）導出できる．

したがって上での考察は，$(E\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$，または，より一般的には $(E\mathfrak{x}_1)\ldots(E\mathfrak{x}_\mathfrak{r})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{r})$ の形の論理式で，自由変数を含まないようなものが含まれている公理系に対しても応用できることになる．

この結果により，個体記号 $\mathfrak{s}$ を導入して論理式 $(E\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ を $\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$ で置き換える場合にも，個体記号 $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_\mathfrak{r}$ を導入して論理式 $(E\mathfrak{x}_1)\ldots(E\mathfrak{x}_\mathfrak{r})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{r})$ を $\mathfrak{A}(\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_\mathfrak{r})$ で置き換える場合にも，公理系は本質的には変わらないことがわかる．

特に，新しく導入された個体記号を含まないような論理式の導出可能性に関しては，もとの公理系と，変更を受けた後の公理系はまったく同等である．また，このことから，両方の公理系は**無矛盾性に関しては同様の振る舞いをする**ことがわかる．

このように公理系を変換する手法の簡単な具体例として，次の3つの公理からなる公理系を考えてみよう．

$$\overline{a < a}$$

$$a < b \,\&\, b < c \to a < c$$

$$(Ex)(Ey)(x<y).$$

ここで，個体記号 α，β を導入して，公理 $(Ex)(Ey)(x<y)$ を $\alpha<\beta$ で置き換えると，束縛された変数が現れない公理系

$$\overline{a<a}$$

$$a<b\,\&\,b<c\rightarrow a<c$$

$$\alpha<\beta$$

が得られる．

この公理系からは，論理式 (b)[8] を用いることにより，ただちにもとの公理系が得られる．一方，この新しく得られた公理系は，本質的にはもとの公理系より強くならない．この公理系から導出可能な任意の論理式 $\mathfrak{F}(\alpha,\beta)$ は，もとの体系で証明される論理式

$$\mathfrak{a}<\mathfrak{b}\rightarrow\mathfrak{F}(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$$

に対応するからである．ここで，$\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{F}(\alpha,\beta)$ に現れない自由変数である．例えば，変更後の公理系で導出可能な論理式

$$a<\alpha\rightarrow\overline{\beta<a}$$

は，もとの公理系から導出可能な論理式

$$b<c\rightarrow(a<c\rightarrow\overline{c<a})$$

に対応する．

この存在公理の除去法は，自由変数を持たない公理にしか適用できないという制約があるわけだが，この制約から自由になるためには，自由変数を含まない $(E\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ の形をした論理式に対して行った我々の考察を，

$$(E\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{a},\ldots,\mathfrak{k},\mathfrak{x})$$

の形の論理式に対して，何らかの形で敷衍しなければならない（ここに，$\mathfrak{a},\ldots$，$\mathfrak{k}$ は，この論理式に現れる全ての自由変数とする）．そのためには，個体記号 $\mathfrak{s}$

---

[8]本書第2章，26 ページ参照．

の代わりに，関数記号 $\mathfrak{f}(a, \ldots, k)$ を導入して，先の場合での 論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$ に対応して，論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k}, \mathfrak{f}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k}))$$

を採用しなければならないであろう．

これにより定式化される推論法は，「任意の値の組 $\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k}$ に対し，$\mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k}, \mathfrak{l})$ を満たすような $\mathfrak{l}$ が存在する」という形の存在定理の後に，「そこで，$\mathfrak{f}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k})$ を，値の組 $\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k}$ に対し $\mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k}, \mathfrak{l})$ となるような値 $\mathfrak{l}$ を対応させる関数としよう」と続けることに相当する．

この推論法で注意すべきことは，この中で**選択原理**が仮定されているということである．値の組 $\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k}$ に対して，常にある性質を持つ $\mathfrak{l}$ が存在するとき，そのようなものを値 $\mathfrak{f}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k})$ として選択するような関数が常に存在することを仮定しているからである[9]．

$$(E\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k}, \mathfrak{x})$$

の形の論理式を，新しい関数記号 $\mathfrak{f}$ を含む論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k}, \mathfrak{f}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k}))$$

に変形する手続き，および自由変数を含まない論理式 $(E\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ を，新しい個体記号 $\mathfrak{s}$ を含む論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$ へ変形する手続きを，対応する存在記号の “記号による整約” と呼ぶことにする．

この手続きと，束縛変数と自由変数の書き換えの手続き[10]を組み合わせることで，任意の冠頭型論理式[11]$\mathfrak{F}$ で論理式変数を含まないものを，束縛変数を含まない論理式で，もとの論理式 $\mathfrak{F}$ が述語計算により，それから復元できるようなものに変形する手続きが得られる．

具体的には，そのような論理式 $\mathfrak{F}$ は，

$$(\mathfrak{x})\mathfrak{F}_1(\mathfrak{x}), \qquad (E\mathfrak{x})\mathfrak{F}_1(\mathfrak{x})$$

---

[9]選択原理の一般的な形の定式化に関しては原書 I，§2，41 ページ参照．そこでの $\mathfrak{G}_1$ には，この例では値の組 $\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k}$ の族が，また $\mathfrak{G}_2$ には，値 $\mathfrak{l}$ の族が対応している．

[10]本書第 2 章，36 ページ参照．

[11]冠頭型については，原書 I，§4，139 ページ参照．〔訳注: 本書第 2 章，36 ページ参照.〕

のうちのどちらかの形をしているわけであるが，$(\mathfrak{x})\mathfrak{F}_1(\mathfrak{x})$ からは束縛変数 $\mathfrak{x}$ を自由変数 $\mathfrak{a}$ に置き換えることで，これと演繹的に同値な論理式 $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{a})$ が得られる．

$(E\,\mathfrak{x})\mathfrak{F}_1(\mathfrak{x})$ からは，記号による整約により論理式 $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{t})$ が得られる．ここに，項 $\mathfrak{t}$ は，$\mathfrak{F}_1(\mathfrak{x})$ が自由変数を含まない場合には，新しく付け加えられた個体記号となり，そうでない場合には，$\mathfrak{F}_1(\mathfrak{x})$ の自由変数の全てを変数に持つ，新しく付け加えられた関数記号となる．いずれの場合にも，$\mathfrak{F}_1(\mathfrak{t})$ に基本論理式 (b) を適用することで，論理式 $(E\,\mathfrak{x})\mathfrak{F}_1(\mathfrak{x})$ に戻ることができる．

ここで，$\mathfrak{F}_1(\mathfrak{a})$，あるいは $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{t})$ が束縛変数を持っていなければ，この論理式がすでに求めるものである．そうでなければ，この論理式は冠頭型であるから，先ほど $\mathfrak{F}$ に対して行った手続きをこの論理式に再び施すことができる．このように，$\mathfrak{F}$ の初めに並んでいる量化詞の数だけ，上の手続きを繰り返すことで，束縛変数を持たない論理式に到達することができる．逆に，述語計算により，この論理式から出発して，もとの論理式 $\mathfrak{F}$ にまで逆のぼることができる．この束縛変数を持たない論理式の論理式 $\mathfrak{F}$ との相違点は，量化詞が現れないことである: $\mathfrak{F}$ で全称記号によって束縛されている変数に相当する箇所には，前には使われていなかった自由変数が現れ，$\mathfrak{F}$ で $(E\,\mathfrak{x})$ によって束縛されていた変数は，$\mathfrak{F}$ が自由変数を含まず，$\mathfrak{F}$ で $(E\,\mathfrak{x})$ の前に全称記号が現れない場合には，新しい個体記号で置き換えられ，それ以外の場合には，$\mathfrak{F}$ にすでに自由変数として現れていた変数と，$(E\,\mathfrak{x})$ の前に現れる全称記号で束縛されていた変数に相当する自由変数の全てを変数とする関数記号で置き換えられるからである．

したがって，与えられた冠頭型の論理式に対して，上で考察した手続きの結果をただちに書き下すことができる．そして，この結果は，自由変数と新しく付け加えられた記号の選択を除けば一意に決まる．

例えば，$\mathfrak{F}$ が

$$(E\,x)(y)(E\,z)\mathfrak{A}(x,y,z)$$

という形をしていて，x，y，z が，ここに現れる変数の全てであるときには，記号による整約と，束縛変数の自由変数への置き換えにより，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{s},a,\mathfrak{f}(a))$$

という論理式が得られる．ただし，$\mathfrak{s}$ はもとの論理式には含まれない個体記号

で，$\mathfrak{f}$ はもとの論理式に含まれない 1 変数関数記号である．同様にして，

$$(x)(E\,y)(E\,z)(u)(E\,v)\mathfrak{A}(x, y, z, u, v, a, b)$$

という論理式で，この表現に現れる以外の変数を含まないようなものからは，

$$\mathfrak{A}(c, \mathfrak{f}(a, b, c), \mathfrak{g}(a, b, c), d, \mathfrak{h}(a, b, c, d), a, b)$$

という論理式が得られる．ただし，$\mathfrak{f}$，$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}$ はもとの論理式には現れない関数記号で，$\mathfrak{f}$ と $\mathfrak{g}$ はそれぞれ 3 変数を持ち，$\mathfrak{h}$ は 4 変数を持つものとする．

特に，このような冠頭型の論理式の，束縛変数を持たない論理式への変形は，形式的公理系が本来の公理[12]のみからなっているときには，それらの公理系の論理式に対して行うことができる．そのようなおのおのの論理式は，束縛変数を含んでいて，冠頭型になっていない場合には，まず冠頭型に変形することができる[13]．したがって今度は，この変形された論理式に対して，束縛変数の自由変数への交換と記号による整約の手続きを施すことができる．

例えば，このような手続きにより，第 1 章で述べた幾何学の結合と順序の公理系[14]からは，自由変数，個体記号，関数記号の選択を除けば一意に決まるような，次の公理系が得られる．

I.　1.　$Gr(a, a, b)$

　　2.　$Gr(a, b, c) \rightarrow Gr(b, a, c) \,\&\, Gr(a, c, b)$

　　3.　$Gr(a, b, c) \,\&\, Gr(a, b, d) \,\&\, a \neq b \rightarrow Gr(a, c, d)$

　　4.　$\overline{Gr(\alpha, \beta, \gamma)}$

II.　1.　$Zw(a, b, c) \rightarrow Gr(a, b, c)$

　　2.　$\overline{Zw(a, b, b)}$

　　3.　$Zw(a, b, c) \rightarrow Zw(a, c, b) \,\&\, \overline{Zw(b, a, c)}$

　　4.　$a \neq b \rightarrow Zw(a, b, \varphi(a, b))$

---

[12]本書第 2 章，29 ページ参照．

[13]原書 I，140 ページ下を参照．

[14]原書 I，5–6 ページ参照．〔訳注: Gr, Zw は，それぞれドイツ語の “Gerade”, “zwischen” からきており，$Gr(a, b, c)$, $Zw(a, b, c)$ は，それぞれ「a, b, c は同一直線上にある」,「a は，b と c を結ぶ直線上 b と c の間にある」という幾何学的関係を頭において考えられている．〕

5. $\overline{Gr(a,b,c)} \,\&\, Zw(p,a,b) \,\&\, \overline{Gr(q,a,b)} \,\&\, \overline{Gr(c,p,q)}$
$\to Gr(p,q,\psi(a,b,c,p,q)) \,\&\, (Zw(\psi(a,b,c,p,q),a,c) \lor$
$Zw(\psi(a,b,c,p,q),b,c))\,.$

このように，存在記号が記号による整約により除去され，そこで現れる変数が全て自由変数となっているような本来の公理からなる公理系を，“整約された”公理からなる公理系と呼ぶことにする．

任意の本質的な公理からなる公理系 (S) で束縛変数の現れるようなものに対して，記号による整約と束縛変数の自由変数への置き換えにより，整約された公理からなるような，対応する公理系 (S') が得られる．推論に関して，この2つの公理系 (S)，(S') の間に成り立っている関係で，まずいえることは，(S) に含まれる論理式は，全て (S') に含まれる論理式から導き出せるということである．このことから，特に (S') の無矛盾性の証明ができれば，これから (S) の無矛盾性が帰結できることがわかる．(S) から (S') への移行の際に導入された記号が個体記号のみの場合には，すでに考察したように，(S) と (S') の2つの公理系は同等になる．つまり，もう少し正確な言い方をすれば，公理系 (S) の形式的体系に属す論理式で (S') から証明可能なものは，全て (S) から導出できる．特に，この場合には (S) の無矛盾性と (S') の無矛盾性は同義になる．

そこで，(S) から (S') への移行の際に新しい関数記号が導入されることもありうるような一般の場合に，同様の結果が得られれば都合がよい．

この問題点の他にも，これまでの我々の考察を通じて，もう1つ別の問題が提起されてくる．束縛変数を含む公理系から整約された公理系に移行するときの束縛変数の除去を，束縛変数の含まれない論理式に対する論理式の導出に対しても拡張できないだろうかという問題である．

この問題は，無矛盾性証明に関する研究において重要な意味を持っている．普通の命題論理を含む形式的体系の無矛盾性を示すためには，ある1つの論理式がそこから導出できないことを示せばよいわけだが，このことから，記号 0 と等号の公理を含む形式的体系に対しては，無矛盾性は $0 \neq 0$ の導出不可能性により特徴づけられることがわかる．任意の形式的体系では，$0 \neq 0$ の代わりに $\mathfrak{A} \,\&\, \overline{\mathfrak{A}}$ という形の論理式を適当にとれるが，このとき $\mathfrak{A}$ は束縛変数を含まないように選ぶことができる．したがって，ある形式的体系の無矛盾性は，ある1つの束縛変数を含まない論理式の導出可能性のいかんに依存することになる．

今，束縛変数を持たない論理式が，ある整約された公理系から導出される場合には，束縛変数を用いることなく導出可能であるという命題が示せたとすれば，そのような公理系の無矛盾性証明は，非常に簡単なものとなる．そのような場合には，その公理系と述語計算からなる形式的体系を，それよりはるかに弱い自由変数を持つ初等計算[15]で置き換えることができることになるからである．

ヒルベルトの ε-記号は，この両方の問題の扱いに関して重要な補助手段となるものだが，以下でこれについての議論を始める．

3.2　ヒルベルトの ε-記号と ε-論理式

ヒルベルトの ε-記号と，それを特徴づける論理式には，記号による整約の手続きに関する考察から出発して，次に述べるような思考の経路を経て到達することができる．

$$(E\,x)\mathfrak{A}(a, \ldots, k, x)$$

という形の存在論理式の記号による整約の手続きの過程での関数記号 $\mathfrak{f}(a, \ldots, k)$ の導入と，ι-規則による同様の関数記号の導入との違いは，

$$(x)(y)(\mathfrak{A}(a, \ldots, k, x) \,\&\, \mathfrak{A}(a, \ldots, k, y) \;\rightarrow\; x = y)$$

という論理式が証明できるという条件が落ちていることにすぎない．

そこで，一般化されたの形の記号による整約を，ι-規則で，2 番目の一意性論理式を前提条件からはずすという変更を加えることで実現することにしてはどうかと考えられる．この変更された ι-規則は，区別をするために，ι の代わりに η という文字を使うことにすれば，次のようになる: $(E\,\mathfrak{v})\mathfrak{A}(\mathfrak{v})$ が証明できるか，あるいは公理であるとき，$\eta_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v})$ を項として導入でき，その際に，

$$\mathfrak{A}(\eta_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}))$$

という論理式を初式として付け加える．

ここで，“$\mathfrak{A}(\eta_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}))$” という表記では，前に ι-記号の導入規則での最後の論理式でもそうだったように，“束縛変数の間の衝突” を避けるために，必要なら

---

[15]本書第 2 章，28 ページ参照．

幾つかの変数が書き換えられているものと考える[16]。

注意.　この "η-規則" は，前に考察した記号による整約と比較して2つの新しい事項を含んでいる．まず第1には，この規則は $(E\,\mathfrak{v})\mathfrak{A}(\mathfrak{v})$ が論理式変数を持つ場合にも適用できることである．第2には，$\eta_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v})$ という記法により，導入される記号が $\mathfrak{A}(\cdot)$ に対応していることが明確化されていることで，特にこのことにより，η-記号によって導入された異なる関数から代入によって，同一の関数が得られるという可能性が出てくる．

例えば，$\mathfrak{A}(a,b,c)$ という論理式で，

$$(E\,x)\mathfrak{A}(a,b,x)$$

は証明できないが，

$$(E\,x)\mathfrak{A}(0,b,x), \quad \text{および} \quad (E\,x)\mathfrak{A}(a,1,x)$$

は証明できるとしよう．このとき，η-規則により，

$$\eta_x\mathfrak{A}(0,b,x), \quad \text{および} \quad \eta_x\mathfrak{A}(a,1,x)$$

という項が導入されるが，1番目の項の b に 1 を代入して，2番目の項の a に 0 を代入すれば，両方とも

$$\eta_x\mathfrak{A}(0,1,x)$$

となる．

これに対して，$\eta_x\mathfrak{A}(0,b,x)$ の代わりに，$\mathfrak{f}(b)$ という関数記号と $\mathfrak{A}(0,b,\mathfrak{f}(b))$ という論理式が，また $\eta_x\mathfrak{A}(a,1,x)$ の代わりに，$\mathfrak{g}(a)$ という関数記号と $\mathfrak{A}(a,1,\mathfrak{g}(a))$ という論理式が導入されたとすると，上で $\eta_x\mathfrak{A}(0,1,x)$ という単一の表現を得たのに対し，$\mathfrak{f}(1)$ と $\mathfrak{g}(0)$ という2つの異なる表現が得られることになる．さらに，場合によっては，等式

$$\mathfrak{f}(1) = \mathfrak{g}(0)$$

が導出できないこともありうる．

$$\mathfrak{A}(0,1,\mathfrak{f}(1)), \qquad \mathfrak{A}(0,1,\mathfrak{g}(0))$$

---

[16]原書 I，394–395 ページの ι-規則に関する注意，また，本書第2章，29 ページでのこの規則の記述を参照．η-記号は，ε-記号への橋渡しとして考えているのにすぎないので，η-記号の形式的記述について細かく考察するのは無駄である．

という 2 つの論理式を用いることができても，論理式

$$(x)(y)(\mathfrak{A}(0,1,x)\,\&\,\mathfrak{A}(0,1,y) \rightarrow x = y)$$

が導出可能であるとは限らないからである．

上の η-規則では，$\eta_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v})$ がつくれるためには $\iota_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v})$ のときと同様に，さらにある論理式，ここでは $(E\,\mathfrak{v})\mathfrak{A}(\mathfrak{v})$ が導出可能であるという条件が必要なわけであるが，この制限は以下のようにして取り除くことができる．

まず，導出可能な論理式

$$\overline{(E\,y)}A(y) \vee (E\,x)A(x)$$

から出発して，述語計算により，

$$(E\,x)((E\,y)A(y) \rightarrow A(x))$$

を得る．この論理式は導出可能だから，これに η-規則を用いて，

$$\eta_x((E\,y)A(y) \rightarrow A(x))$$

という項を導入して，

$$(E\,y)A(y) \rightarrow A(\eta_x((E\,y)A(y) \rightarrow A(x)))$$

という初式を導入する．

ここで，$\varepsilon_x A(x)$ という記号を

$$\varepsilon_x A(x) = \eta_x((E\,y)A(y) \rightarrow A(x))$$

という等式で顕現的に定義して——さらに論理式の前半に現れる変数 y を x に書き換えれば——上の論理式から，

$$(E\,x)A(x) \rightarrow A(\varepsilon_x A(x))$$

という論理式が得られる．この論理式では，式の前半と後半の束縛変数をそれぞれ任意に書き換えられるわけであるが，この論理式により η-記号はまったく不要になる．

$$(E\,\mathfrak{v})\mathfrak{A}(\mathfrak{v})$$

という論理式が導出されるとき，上の論理式から代入と推論図式により[17]，ただちに

$$\mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}))$$

が得られるからである．このことにより，η-規則を廃止して，その代わりに $\varepsilon_{\mathfrak{v}}A(\mathfrak{v})$ という記号を基本記号として

$$(\varepsilon_0) \qquad (Ex)A(x) \to A(\varepsilon_x A(x))$$

という論理式とともに形式的体系に導入すればよいことが明らかになる．

この論理式ですぐ気がつくのは，これが記号 $\mu_x A(x)$ に対する論理式 (μ_1) と——記号の違いを別とすれば——まったく同じであるという点である[18]．論理式 (μ_1) は，ι-項による $\mu_x A(x)$ の顕現的な定義の際に導いたものであった．したがって，数論の形式的体系での証明に関しては，ε-記号と論理式 (ε_0) により得られるものは明らかに，全て ι-規則の適用に還元できる．

このことは，意味論の立場からも容易に説明がつく．論理式 (ε_0) は η-規則と同値である．この η-規則は，2番目の一意性論理式の仮定がないことで，選択公理を内蔵しているという点が ι-規則を越えているわけである．ところが，数論においては，最小数の原理により，どの自然数の集まりからも最小数を代表元として選び出すことができるため，選択公理は必要とならない．このことはまた，$\mu_x A(x)$ を定義する際，ι-項の導入にあたって，最小数の原理が基本的な役割を果たしていたことに対応する．

ε-記号は，μ-記号の任意の対象領域に対する一種の一般化となっている．形のうえでは，これは1つの命題の変数を持つ関数となっており，この命題の変数は，ε-記号に付随した束縛変数に対応するパラメータの他に，自由変数をパラメータとして含んでいることもある．この関数の具体的な命題 $\mathfrak{A}$ における（パラメータの値を確定したとき）の値は，対象領域の元のうちのあるもので，論理式 (ε_0) の意味論的翻訳「 $\mathfrak{A}$ を満たすようなものが対象領域の中に存在するなら，そのようなものの1つ」を満たすようなものである．

---

[17] ここで束縛変数に関して注意すべき事項については，すぐ後で詳しく論じる．

[18] 原書 I，§8，405 ページ，または本書第2章，34 ページ参照．

このように，命題の対象物への普遍的な対応が考えられるという立場は，一見，大変に強い仮定であるように思える．しかしながら，論理式変数が束縛された形で現れることのない1階の論理においては，$\varepsilon_x A(x)$ という記号に含まれる変数 A は，代入によってのみ除去されるため，この対応は，実は大変に制約されたものとなっていることを見逃してはならない．

それでも，論理的体系に，そのようなものの論理学的扱いがはっきりしないうちに，普遍的な命題関数の形をした記号を導入してしまうことは不当であり，ε-記号を，それに付随する論理式とともに導入 することは，形式論の立場からみて何かおかしいのではないかという印象は，上の考察だけからではぬぐい去れないかもしれない．

しかし，この異議に対しては，容易に反論を与えることができる．そもそも最終的な形の数理論理学的形式的体系の推論体系の構築に，ε-記号を組み込む必要性はまったくないからである．むしろ ε-記号を用いる演算は，数学的考察の多くの局面で大変に有用となる補助計算則のようなものであるにすぎないとみなすことができる．

この数学への応用という観点からは，ε-記号の導入で，論理式 (ε_0)

$$(E\,x)A(x) \;\to\; A(\varepsilon_x A(x))$$

の代わりに，それと演繹的に同値な存在記号を取り去った

$$A(a) \;\to\; A(\varepsilon_x A(x))$$

を ε-記号の公理とするほうが便利であることがわかる．以下では，この最後の論理式を“ε-論理式”と呼ぶことにする．

ε-論理式の導入に対して，以下のような規則を設けることにする:

1. $\mathfrak{A}(a)$ が論理式で束縛変数 $\mathfrak{x}$ を含んでいないとき，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ は項である．このような形をした項を ε-項と呼ぶことにする．

2. ε-記号に付随した束縛変数に対しては，束縛変数の書き換え規則が適用できる．ただし，これには，“束縛変数同士の衝突”を回避しなければならないという制約が付く．この条件は，前に ι-規則に対して定式化したものに相当するものである[19]．量化詞 $(\mathfrak{x})$，$(E\,\mathfrak{x})$，あるいは ε-記号 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}$ の適用範囲には，これらの記号が同じ束縛変数 $\mathfrak{x}$ とともに現れてはいけない．

[19] 原書 I，§8，394–395 ページ，あるいは本書第 2 章，29 ページ参照．

3. 自由個体変数および自由論理式変数への代入も，衝突の回避の条件で制限される．これにより制約が必要以上に大きくならないため，代入に際して，幾つかの束縛変数の書き換えを行ってもよいことにする．

実際，衝突の回避を行わなくてはならないとすると，$A(c)$ という代入型の論理式変数を持つ ε-論理式に，変数 c が，ある量化詞，あるいは ε-記号の適用範囲内にあるような論理式 $\mathfrak{A}(c)$ を代入することができなくなってしまう．この困難は，代入の直前に書き換えを行って，今の例では，$\mathfrak{A}(x)$ で幾つかの束縛変数の書き換えを行って得られるある論理式 $\mathfrak{A}^*(x)$ により[20]，

$$\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon_x \mathfrak{A}^*(x))$$

という形の論理式を得ることにしてよいとすることで解決できる．

例えば，$\mathfrak{A}(c)$ が

$$(E\,y)(c = y)$$

という論理式であるとして，ε-論理式への代入は，書き換えにより，次のようにして行うことができる: まず，$\varepsilon_x A(x)$ の代わりに，

$$\varepsilon_x((E\,y)(x = y))$$

という項が得られるが，不必要な括弧を取り除いて，これを

$$\varepsilon_x(E\,y)(x = y)$$

と書くことにする[21]．

ここで，y を z で書き換えると，

$$\varepsilon_x(E\,z)(x = z)$$

が得られる．よって，$A(\varepsilon_x A(x))$ に対応して，論理式

$$(E\,y)(\varepsilon_x(E\,z)(x = z) = y)$$

が得られ，$A(a)$ に対応して，論理式

$$(E\,y)(a = y)$$

---

[20] $\mathfrak{A}^*(x)$ のとり方については，原書 I，394 ページ参照．

[21] 一般に，量化詞と ε-記号が続けて現れる場合に，今までも量化詞が続けて現れる場合にそうだったように，括弧は曖昧さが生じない限り，全て省略することにする．

が得られる．したがって，全体として

$$(E\,y)(a = y) \rightarrow (E\,y)(\varepsilon_x(E\,z)(x = z) = y)$$

が得られたことになる．

同様にして，全ての場合において，しかるべき書き換えにより，束縛変数の間の衝突を回避することが可能である．このような際になされるべき書き換えについては，今後はいちいち注意をしないことにする．また，束縛変数の書き換えで得られる論理式は，もとの論理式と同じ記号で表すことにする．

さらに，項が“等しい”あるいは“等しくない”というときには，断らない限り束縛変数の書き換えを除いて考えることにする．

ε-記号を導入することの有用性は，それから，どんな演繹的な帰結が，直接に得られるかをみることで，すぐ明らかになる．

まず，図式 (β)[22]により，ε-論理式から出発して，(ε_0) に戻ることができる．これと，基本論理式 (b) から代入により得られる論理式

$$A(\varepsilon_x A(x)) \rightarrow (E\,x)A(x)$$

により，

$$(\varepsilon_1) \qquad (E\,x)A(x) \sim A(\varepsilon_x A(x))$$

という同値性が得られる．この論理式に現れる代入型 $A(a)$ のところに，$\overline{A(a)}$ を代入して得られる同値論理式の両辺の否定をとれば，

$$\overline{(E\,x)\,\overline{A(x)}} \sim \overline{\overline{A(\varepsilon_x \overline{A(x)})}}$$

が得られるが，これから，

$$(\varepsilon_2) \qquad (x)A(x) \sim A(\varepsilon_x \overline{A(x)})$$

が得られる．

論理式 (ε_1)，(ε_2) をみると，これらの同値論理式を存在記号と全称記号の顕現的定義として採用して，それにより，基本論理式 (a)，(b)[22] と推論規則 (α) および (β) の代用とすることができるのではないかと考えられるが，実際，これは可能である．

---

[22]本書第 2 章，26 ページ参照．

すなわち，ε-論理式と (ε_1) から命題論理により，論理式 (b)

$$A(a) \to (E\,x)A(x)$$

が得られる．さらに，ε-論理式で，代入型 $A(c)$ に $\overline{A(c)}$ を代入すれば，

$$\overline{A(a)} \to \overline{A(\varepsilon_x \overline{A(x)})}$$

が得られるが，これの対偶をとれば，

$$A(\varepsilon_x \overline{A(x)}) \to A(a)$$

となり，これと (ε_2) により，論理式 (a)

$$(x)A(x) \to A(a)$$

が得られる．

後は推論規則 (α)，(β) を示せばよいが，これは，同値論理式 (ε_1)，(ε_2) から代入規則に還元できる．なぜなら，

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(a)$$

という形の論理式で，変数 a は明記された場所のみに現れ，x は $\mathfrak{A}(a)$ の中に現れないようなものから，代入により，

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\varepsilon_x \overline{\mathfrak{B}(x)})$$

という論理式が得られるが，これと (ε_2) への代入により得られる論理式

$$(x)\mathfrak{B}(x) \sim \mathfrak{B}(\varepsilon_x \overline{\mathfrak{B}(x)})$$

により，論理式

$$\mathfrak{A} \to (x)\mathfrak{B}(x)$$

が得られるからである．同様にして，

$$\mathfrak{B}(a) \to \mathfrak{A}$$

という論理式で a が表記の場所のみに現れ，x が $\mathfrak{B}(a)$ の中に現れないものからは，代入により，

$$\mathfrak{B}(\varepsilon_x \mathfrak{B}(x)) \to \mathfrak{A}$$

が得られ，これと (ε_1) への代入によって得られる

$$(E\,x)\mathfrak{B}(x) \sim \mathfrak{B}(\varepsilon_x\mathfrak{B}(x))$$

により，論理式

$$(E\,x)\mathfrak{B}(x) \rightarrow \mathfrak{A}$$

が得られる．以上により，自由変数を持つ初等計算に ε-論理式と定義 (ε_1)，(ε_2) を加えることで得られる形式的体系は，**すでに述語計算の全てを含んでいる**ことがわかった．

ε-記号を導入することのもう 1 つの利点は，ε-記号と ε-論理式の述語計算への付加により，ι-記号が必要でなくなることがあげられる．**ε-記号は ι-の役割を全て代行できる．**なぜなら，対応する一意性論理式の証明できるような論理式 $\mathfrak{A}(c)$ に対しては，特に $(E\,x)\mathfrak{A}(x)$ が証明できるが，一方，(ε_0) からは代入により，

$$(E\,x)\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon_x\mathfrak{A}(x))$$

という論理式が得られ，したがって，

$$\mathfrak{A}(\varepsilon_x\mathfrak{A}(x))$$

が得られる．この論理式は，$\mathfrak{A}(c)$ に ι-推論規則を適用して得られる終式の ι-記号を ε-記号で置き換えたものになっているからである[23]．

ι-記号の適用範囲が，対応する一意性論理式の導出できるようなものに限られていたのに対し，ε-記号は，自由変数を持つ任意の論理式に対して適用できる．

全体として，ε-記号と ε-論理式を用いることにより，**記号による整約の手続きの一般的な形式化**が得られたことになる[24]．すなわち，論理式

$$(E\,\mathfrak{v})\mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k}, \mathfrak{v})$$

[23] ε-記号のこの役割は，ε-記号の意味を考えれば明らかである．つまり，それを満たすようなものが対象領域に少なくとも 1 つは存在するような述語 $\mathfrak{A}(c)$ に対する ε-項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ は，そのようなものの 1 つを表現していのであるから，もし，$\mathfrak{A}(c)$ がただ 1 つのものによって満たされるなら，まさにそれが ε-項の表現するものとなる．したがって，このときには，この ε-項は ι-項 $\iota_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ が表現するものと一致することになる．

[24] 49 ページ参照．

で，$\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k}$ が，そこに現れる自由変数の全てであるようなものにこの手続きを適用するときには，ε-論理式から導出可能な論理式 (ε_0)

$$(Ex)A(x) \rightarrow A(\varepsilon_x A(x))$$

を用いて，代入（および必要なら変数の書き換え）により，論理式

$$(E\,\mathfrak{v})\mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k}, \mathfrak{v}) \rightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k}, \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k}, \mathfrak{v}))$$

を得ることにすればよい．この論理式から，顕現的定義

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k}, \mathfrak{v})$$

と $(E\,\mathfrak{v})\mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k}, \mathfrak{v})$ により，論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k}, \mathfrak{f}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k}))$$

が得られる．

注意．　$\mathfrak{f}(a, \ldots, k)$ の顕現的定義を形式的に行うためには，等号の公理が必要である．しかし，考察している形式的体系に等号の公理が含まれていない場合にも，顕現的定義を全ての $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k}, \mathfrak{v})$ という表現を $\mathfrak{f}(\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{k})$ で置き換えられ，また逆も可能であるという**代入規則**として考えることができる．

一般に，代入規則の形をしている顕現的定義および等式や同値論理式で表される顕現的定義は，それが用いられている証明で，終式には，それによって導入された記号が現れないようなものから除去することができるということを注意しておく．この際に前提となるのは，全ての顕現的定義において，定義式に現れる全ての変数，かつ，それらのみが定義される記号にパラメータとして現れるという条件が満たされていることである[25]．

以上により，ε-記号は，その ε-論理式による特徴づけによって，定義 (ε_1), (ε_2) とともに用いられることで量化詞に関する論理式と図式を提供し，ι-記号を代行し，記号による整約を顕現的定義に帰着させるという役割を果たすことが明らかになった．

ヒルベルトが ε-記号を証明論に導入したのは，まさに，これらの性質のゆえであったわけであるが，ここで我々の取り組もうとしている問題[26]に対する ε-記号の有用性を検討するときがきている．まず確かめなければならなかったの

---

[25]原書 I，§7，292–293 ページ，あるいは本書第 2 章，30 ページ参照．

[26]51 ページ参照．

は，本来の公理からなる，ある体系 (S) から整約された形の体系 (S') への移行が述語計算の下で，もとの体系の全ての論理式について，それが (S') で導出可能なら (S) でも導出可能であるという意味で，問題のない体系の拡張となっていることであった．もう一方の課題は，整約された形の公理系から，述語計算によって導出可能な束縛変数を持たない論理式は，常に束縛変数のまったく現れないような導出によって得られるということを示すことであった．

全ての，記号による整約は，ε-論理式により行うことができることから，この 2 つの課題は，ε-記号に関する 2 つの定理により解決されるが，これを証明の都合から，上に述べた 2 つの問題とは逆順に，それぞれ第 1，第 2 ε-定理と呼ぶことにする．

これらの定理は，述語計算の記号に ε-記号と幾つかの個体記号，述語記号，関数記号を付け加え，述語計算の初式に ε-論理式と幾つかの ε-記号を含まない本来の公理 $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_\mathfrak{k}$ を付け加えて得られる形式的体系 F に関するものである．このような形式的体系 F に対し，2 つの定理は次のように記述できる．

1. $\mathfrak{E}$ が F で導出可能な束縛変数を含まない論理式で，公理 $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_\mathfrak{k}$ も束縛変数を含まないなら，論理式 $\mathfrak{E}$ は公理 $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_\mathfrak{k}$ から，束縛変数をまったく用いることなく，つまり自由変数をもつ初等計算[27]で導出することができる（“第 1 ε-定理”）．

2. $\mathfrak{E}$ が F で導出可能な ε-記号を含まない論理式であるとき，これを公理 $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_\mathfrak{k}$ から ε-記号をまったく用いず述語計算のみにより導出することができる（“第 2 ε-定理”）．

第 1 ε-定理の帰結として，“初等計算の定理” とでも呼ぶことのできる ε-記号についての言及はもはや含まない，次のような定理が得られる．束縛変数を含まない本来の公理からなる公理系から，同様に束縛変数を含まない論理式 $\mathfrak{E}$ が述語計算により導出可能なとき，この導出は自由変数をもつ初等計算の中ですでに行うことができる[28]．

以下では，まず第 1 ε-定理の証明を見てみよう．第 2 ε-定理は，その後に続

---

[27]本書第 2 章，28 ページ参照．

[28]この定理は，シュテニウス (Erik Stenius) が，論文 “Über das Interpretationsproblem der formalisierten Zahlentheorie”, *Acta Academiae Aboensis Math. et Phys.* XVIII, 3, Abo (1952) で証明している述語計算に関する，より一般的な定理の特殊例としても得られる．

いてなされる考察の帰結として得られることになる[29].

3.3　第1 ε-定理の証明

a) 準備.　第1 ε-定理の証明を始めるにあたって，準備として幾つかの簡略化を行う．まず，考察の対象となっている導出の終式に関してであるが，これは仮定により束縛変数を含んでいないのであった．ここで，さらに以下の理由により，一般性を失うことなく，この終式は自由変数も含んでいないと仮定してよい．

パラメータを持たない論理式変数に関しては，論理式でパラメータを持たない論理式変数 $\mathfrak{B}$ の現れるものは，$\mathfrak{B}$ を全て $\mathfrak{W}(\mathfrak{a})$ で置き換えて得られる論理式と演繹的に同値となる．ここに $\mathfrak{W}(\cdot)$ は今までにまだ現れていない1つのパラメータを持つ論理式変数で，$\mathfrak{a}$ は任意の項である．特に，考察の対象となっている論理式が束縛変数を含まない場合には，演繹的同値性は，すでに命題計算により成り立っている[30].

したがって，論理式 $\mathfrak{E}$ から $\mathfrak{E}$ に現れるパラメータを持たない論理式変数の全てに，上記の置き換えを行い，論理式 $\mathfrak{E}_1$ を得る．さらに，$\mathfrak{E}_1$ に現れる個体変数をそれぞれ新しい個体記号で置き換え，パラメータを持つ論理式変数については，それらをそれぞれ同じ数のパラメータを持つ新しい述語記号で置き換えることで，論理式 $\mathfrak{E}_2$ が得られる．

このとき，論理式 $\mathfrak{E}_2$ は $\mathfrak{E}_1$ から，また $\mathfrak{E}_1$ は $\mathfrak{E}$ から代入によって得られている．したがって，体系 F での $\mathfrak{E}$ の導出から，$\mathfrak{E}_2$ の導出が得られる．この新しい終式 $\mathfrak{E}_2$ は，自由変数を1つも含んでいない．したがって，導出される論理式が自由変数を含んでいない場合について，第1 ε-定理が成り立つとすれば，この $\mathfrak{E}_2$ の導出から，同じ論理式の導出で，自由変数を持つ初等計算のみ

---

[29] 188 ページ以降参照.

[30] $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ が問題となっている論理式で，$\mathfrak{F}(\mathfrak{W}(\mathfrak{a}))$ が上のような置き換えで，それから得られる論理式であるとすると，$\mathfrak{F}(\mathfrak{W}(\mathfrak{a}))$ は $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ から代入規則により得られる．他方，$\mathfrak{F}(\mathfrak{W}(\mathfrak{a}))$ からは，まず代入規則により $\mathfrak{F}(\overline{\mathfrak{W}(\mathfrak{a})})$ が得られ，恒真な論理式 $(A \sim B) \vee (A \sim \overline{B})$ への代入によって得られる

$$(\mathfrak{B} \sim \mathfrak{W}(\mathfrak{a})) \vee (\mathfrak{B} \sim \overline{\mathfrak{W}(\mathfrak{a})})$$

から，論理式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ が得られる．

によるものが得られる．この導出において，新しく導入された個体記号や述語記号の代わりに——これらに対する公理は存在しないわけだから——証明の全体の整合性を損なうことなく，対応する個体変数や述語変数を置くことができる．このようにして，自由変数を持つ初等計算による論理式 $\mathfrak{E}_3$ の導出が得られるが，$\mathfrak{E}_1$ は代入により $\mathfrak{E}_3$ から得ることができる．ところが，$\mathfrak{E}$ は $\mathfrak{E}_1$ から命題論理により得られるから，これにより $\mathfrak{E}$ の導出から束縛変数を除去できたことになる．

以上により，第 1 ε-定理の証明のためには，終式が自由変数を含まない場合のみを考察すれば十分であることがわかった．以下では，常に終式 $\mathfrak{E}$ に対して，この条件を仮定して考察を進めることにする．

次の準備は，全称記号と存在記号の除去である．前の節で示したように，基本論理式 (a)，(b) と図式 (α) (β) は，ε-論理式と顕現的定義 (ε_1)，(ε_2) により取り除くことができる[31]．この基本論理式と図式の除去操作を考察の対象となっている論理式 $\mathfrak{E}$ の導出に施して，$(\mathfrak{v})\mathfrak{A}(\mathfrak{v})$ の形の表現のおのおのを $\mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{v})})$ で，また $(E\,\mathfrak{v})\mathfrak{A}(\mathfrak{v})$ の形の表現を $\mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}))$ で置き換えれば，(ε_1)，(ε_2) から代入によって得られた論理式は，論理式 $A \sim A$ から代入によって得られる論理式に変換される．量化詞は，この方法により，完全に除去することができ，その結果として，**束縛変数は ε-記号との結び付きでのみ現れ，証明の流れの中では，繰り返し，代入，束縛変数の書き換え，および推論図式のみが適用されている**ようになる．

このように変形された導出に，それを“証明糸”へ分解する手続きを行い，代入を初式に引き戻すことができる[32]．さらに，ここでまだ残っている自由変数については，個体変数はそれぞれを（まったく任意に選んだ）同一の個体記号で置き換え，パラメータの数が同じ論理式変数はそれぞれを同数のパラメータを持つ同一の述語記号で置き換え，パラメータを持たない論理式変数については，それぞれを変数を含まない同一の論理式で置き換えることにより除去できる．

導出に対して施されたこれらの変更は，終式 $\mathfrak{E}$ には影響を及ぼさない．$\mathfrak{E}$ は量化詞も自由変数も含まず，証明糸の整約においても変化しないからである．

---

[31] 59 ページ参照．

[32] 原書 I，§6，220–227 ページ，または本書第 2 章，37 ページ以降参照．

以上により，論理式 $\mathfrak{E}$ の導出——“導出” という用語はここでは拡張された意味で用いられている[33]——で，以下の性質を持つものが得られたことになる．そこに現れる論理式の全ては，個体記号，述語記号，関数記号，(それにより束縛されるところの変数を伴った) ε-記号，および述語計算の記号からなる．初式の全ては，恒真な命題計算の論理式から代入により得られるものか，公理 $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_\mathfrak{k}$ のどれか，またはそのようなものから，代入により得られるものとなっている．証明の流れの中では，代入，束縛変数の書き換え，および推論図式の繰り返しのみが適用されている．このような性質を持つ導出を，“正規化された” 証明と呼ぶことにする．

上のようにして得られる $\mathfrak{E}$ の正規化された証明に，ε-論理式への代入によって得られる初式が含まれない場合には，ε-記号を完全に除去することができる．ε-項を変数 a で置き換えても，正規化された証明の性質は失われないからである．このとき，他の ε-項に含まれていないような ε-項について，置き換えを行えば十分であることは，明らかである．これにより，論理式 $\mathfrak{E}$ の公理 $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_\mathfrak{k}$ からの導出で，自由変数を持つ初等計算のみによるものが得られるが，このとき得られた導出は本来の意味での導出である．恒真な命題論理の論理式あるいは公理 $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_\mathfrak{k}$ のうちの１つへの代入によって得られた初式に対しては，後で対応する論理式からの導出を付け加えることができるからである．したがって，この場合には，第１ ε-定理の主張の正しいことが示せたことになる．

以上により，我々の論証のためには，論理式 $\mathfrak{E}$ の正規化された証明が与えられたとき，その初式のうち，ε-論理式への代入によって得られているものを除去することができることを示せば十分であることがわかった．

このような初式を “問題点となる論理式” と呼ぶことにしよう．特に，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}) \rightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon_\mathfrak{v}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}))$$

の形の論理式を，“ε-項 $\varepsilon_\mathfrak{v}\mathfrak{A}(\mathfrak{v})$ に属す” 問題点となる論理式ということにする (この呼び方は，問題点となる論理式の属す ε-項は，そこに現れる束縛変数のとり方を除いて一意に決まるという意味で採用されている)．

b) ヒルベルトの証明方針．　我々の課題であるところの 第１ ε-定理の論証は，以上により，正規化された証明から，問題点となる論理式を除去すること

[33]原書 I，227 ページ下参照．

ができることを示すことに帰着された．この除去を実行するために用いる手法は，ヒルベルトによるものである．まず説明のために，全ての問題点となる論理式は 1 つの ε-項に属しているという特殊な場合について考えてみよう．これらの問題点となる論理式は，

$$(\mathfrak{K})\begin{cases}\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))\\ \quad\vdots\\ \mathfrak{A}(\mathfrak{k}_\mathfrak{n}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))\end{cases}$$

であるとする[34]．ここに，$\mathfrak{k}_1,\ldots,\mathfrak{k}_n$ は，項で ε-記号を含んでいることもありうる．我々の除去法は以下の事実に基づく．考察の対象となっている導出において，そこに現れる項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ を，全てある項 $\mathfrak{t}$ で置き換えたとき，恒真な命題計算の論理式，あるいは，公理 $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_\mathfrak{k}$ うちの 1 つへの代入によって得られているような初式は，置き換えの後でも，全て同様の論理式への代入によって得られるものとなっている．さらに，証明のつじつまも保たれる．

注意．　我々は束縛変数の選び方のみの違う論理式を同一視しているという点に，再び注意を促しておこう．特に，これは，上の置き換えを行う場合にもそうである．

さて，今 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ が，全て項 $\mathfrak{k}_1$ で置き換えられたとしよう．これにより，問題点となる論理式 $(\mathfrak{K})$ は論理式

$$\begin{gathered}\mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1)\\ \vdots\\ \mathfrak{B}_\mathfrak{n} \to \mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1)\end{gathered}$$

で置き換えられる．これらの論理式は $\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1)$ から，恒真な論理式

$$A \to (B \to A)$$

により導出できる．したがって，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1)$ を初式として付け加えれば，最初の導出で問題点となる論理式であったものは，ここでは，全て初式としてではなく，導出される形で現れるという意味で，問題点となる論理式の除去され

[34] ここでは，2 つの形の異なる論理式 $\mathfrak{A}(c)$，$\mathfrak{B}(c)$ で，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ と $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$ が同じ形になるようなものは存在しないという事実が暗に用いられている．実際，このような可能性は，2 つの束縛変数の衝突の回避に関する取り決めにより起こりえない．

た $\mathfrak{E}$ の導出が得られる．これにより，論理式 $\mathfrak{E}$ の自由変数をもつ初等計算における $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_{\mathfrak{k}}$，および $\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1)$ からの導出が得られたことになる．

論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1)$ は自由変数を含まないから，演繹定理（これは ε-論理式が含まれていても正しい）[35]を，この導出に適用することにより，$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1)$ は初式としてもはや現れず，したがって論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1) \rightarrow \mathfrak{E}$$

の導出で，自由変数を持つ初等計算と，公理 $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_{\mathfrak{k}}$ しか用いられていないようなものが得られる．前の $\mathfrak{E}$ の導出では，図式 (α)，(β) も，代入も用いられていなかったので，ここでの演繹定理の応用は，まったく初等的な，つまり命題論理にのみ基づくものとなっている．

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1) \rightarrow \mathfrak{E}$$

の導出を得たときとまったく同様に，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_2) \rightarrow \mathfrak{E}$$
$$\vdots$$
$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_n) \rightarrow \mathfrak{E}$$

の導出で，やはり公理 $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_{\mathfrak{k}}$ と自由変数を持つ初等計算のみによるものが得られる．論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1) \rightarrow \mathfrak{E},\ldots,\quad \mathfrak{A}(\mathfrak{k}_n) \rightarrow \mathfrak{E}$$

からは命題論理により，論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{k}_n) \rightarrow \mathfrak{E}$$

が得られる．一方，以下のようにして，

$$\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1)} \,\&\, \ldots \,\&\, \overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_n)} \rightarrow \mathfrak{E}$$

の証明が得られる．再び，$\mathfrak{E}$ の正規化された証明で $(\mathfrak{K})$ の論理式を初式として用いているものから出発する．$(\mathfrak{K})$ の中のそれぞれの論理式は，命題計算により，論理式

$$\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1)} \,\&\, \ldots \,\&\, \overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_n)}$$

[35] 原書 I，150–154 ページ参照．そこでなされた論証は，我々のここでの形式的体系においても成り立つ．これに続くリマークも参照．

から導出可能である．$\mathfrak{x}=1,\cdots,\mathfrak{n}$ に対し，論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_\mathfrak{r}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))$$

は $\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_\mathfrak{r})}$ から，恒真な論理式

$$\overline{A} \to (A \to B)$$

を用いることにより導出可能だからである．したがって，この正規化された導出に ($\mathfrak{K}$) のおのおのの論理式の

$$\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1)} \,\&\, \ldots \,\&\, \overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_\mathfrak{n})}$$

からの導出を付け加えれば，$\mathfrak{E}$ の証明で問題点となる論理式が初式に現れないようなものが得られる．ところが，これから演繹定理により，論理式

$$\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1)} \,\&\, \ldots \,\&\, \overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_\mathfrak{n})} \to \mathfrak{E}$$

の導出で，論理式

$$\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1)} \,\&\, \ldots \,\&\, \overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_\mathfrak{n})}$$

は初式として用いられていない．したがって，自由変数を持つ初等計算の他には $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_\mathfrak{k}$ しか必要としないようなものが得られる．

論理式

$$\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1)} \,\&\, \ldots \,\&\, \overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_\mathfrak{n})} \to \mathfrak{E}$$

は

$$\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{k}_\mathfrak{n})} \to \mathfrak{E}$$

と変形できるから，これと，前に得られていた論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{k}_\mathfrak{n}) \to \mathfrak{E}$$

から命題計算により $\mathfrak{E}$ が得られる．したがって，全体として，($\mathfrak{K}$) の論理式は初式として用いられず，他の新しい初式も用いられていないような論理式 $\mathfrak{E}$ の導出が得られたことになる．これにより，論理式 $\mathfrak{E}$ の正規化された証明から初式としての問題点となる論理式を除去することに成功したことになる．

c) ε-記号の組み合わせの種類，ε-記号の次数と階数.　さて，今度は上に述べた特殊な場合における問題点となる論理式の除去法を，一般の場合に適用できるように変形しよう.

そのためには，ε-記号の組み合わせの種類の可能性について調べる必要がある．組み合わせの種類は，ι-記号のときとまったく同様で，ここでも，その記述のために“格納”，“上位”[36]という概念を用いる．ある ε-項は他の ε-項の構成要素となっているとき，これの中に“格納されている”という．“上位にある”という関係は一般に“ε-表現”，つまり ε-項，あるいは ε-項から自由個体変数をその ε-項に現れない束縛変数に書き換えることで得られた表現に関するものである[37].

ε-表現 $\mathfrak{a}$ は，他の ε-表現 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v})$ の一部となっており，かつ変数 $\mathfrak{v}$ を含んでいるとき，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v})$ の“下位にある”という．このとき，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v})$ は $\mathfrak{a}$ の“上位にある”ともいう.

注意.　定義により，ε-表現 $\mathfrak{a}$ が ε-項 $\mathfrak{t}$ の一部であるとき，必ずしも $\mathfrak{t}$ に格納されているとは限らないし，$\mathfrak{t}$ の下位にあるとも限らない.

例えば，$\mathfrak{t}$ が

$$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \varepsilon_{\mathfrak{y}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \varepsilon_{\mathfrak{z}}\mathfrak{C}(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})))$$

という形をした項であるとき，ε-表現 $\varepsilon_{\mathfrak{z}}\mathfrak{C}(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ は，〔訳注: 束縛変数 $\mathfrak{x}$，$\mathfrak{y}$ を含んでいるから〕ε-項ではなく，したがって $\mathfrak{t}$ に格納されておらず，〔訳注: 束縛変数 $\mathfrak{x}$ を含まないから〕$\mathfrak{a}$ の下位にあるのでもない.

全称記号と存在記号の除去の際に得られる表現が，格納と上位の関係の良い例を提供する.

一例として，

$$(E\,\mathfrak{x})(E\,\mathfrak{y})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

という表現で $(E\,\mathfrak{x})$，$(E\,\mathfrak{y})$ 以外には存在記号の現れないようなものから，存在記号を除去することを，考えてみよう.

まず，$(E\,y)\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ を

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \varepsilon_{\mathfrak{y}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}))$$

---

[36]原書 I，397–400 ページ参照.

[37]ε-項と ε-表現の相違は，ι-項と ι-表現の相違に相当する．原書 I，398 ページ参照.

で置き換えることになる．これを省略して $\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$ と書くことにすれば，$(E\,\mathfrak{x})(E\,\mathfrak{y})$ $\mathfrak{A}(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ は，$(E\,\mathfrak{x})\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$ で置き換えられる．今度は，これが，

$$\mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}))$$

で置き換えられるが，ここで，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$ の $\mathfrak{B}(\cdot)$ への代入は，(束縛変数の衝突の回避のため) 変数 $\mathfrak{y}$ の書き換えを伴って行われることになる．これにより

$$\mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x},\varepsilon_{\mathfrak{z}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x},\mathfrak{z})),\varepsilon_{\mathfrak{y}}\mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x},\varepsilon_{\mathfrak{z}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x},\mathfrak{z})),\mathfrak{y}))$$

が得られるが，これは，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$$

という形をした表現になっている．ここに，$\mathfrak{a}$ は表現 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x},\varepsilon_{\mathfrak{z}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x},\mathfrak{z}))$ で，$\mathfrak{b}$ は表現 $\varepsilon_{\mathfrak{y}}\mathfrak{A}(\mathfrak{a},\mathfrak{y})$ である．特に $\mathfrak{A}(a,b)$ が論理式なら $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ は項となり，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{b}$ に格納されており，ε-表現 $\varepsilon_{\mathfrak{z}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x},\mathfrak{z})$ において，変数 $\mathfrak{x}$ を項 $\mathfrak{a}$ で置き換え，$\mathfrak{z}$ を $\mathfrak{y}$ に書き換えることで $\mathfrak{b}$ が得られるわけだが，この ε-表現は項 $\mathfrak{a}$ の下位にある．

同様にして，ε-記号による量化詞の除去により，

$$(\mathfrak{x})(E\,\mathfrak{y})\mathfrak{A}(\mathfrak{x},\mathfrak{y}),\qquad (E\,\mathfrak{x})(\mathfrak{y})\mathfrak{A}(\mathfrak{x},\mathfrak{y}),\qquad (\mathfrak{x})(\mathfrak{y})\mathfrak{A}(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$$

という形の表現は，適当な ε-表現 $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$ により，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$$

と表される．

さらにまた，

$$(E\,\mathfrak{x}_1)(E\,\mathfrak{x}_2)\ldots(E\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}})$$

という形をした論理式で，$\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}$ 以外には束縛変数が現れないものについては，存在記号を ε-記号により除去することにより，適当な ε-表現 $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}$ により

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}})$$

という形の論理式に変換される．

格納と上位の関係により，ε-項を“次数”と“階数”で分類することが考えられる．

ε-項 $\mathfrak{t}$ の**次数**は，次のようにして決まる: $\mathfrak{t}$ に始まって，少なくとも1つの他の項を格納している項には，そこに格納された項の1つが続くような ε-項の列の全体を考える．

そのような列は有限個しかなく，おのおのの列についても，その中に現れる項の数は有限で，たかだか $\mathfrak{t}$ の中に現れる ε-項の数（$\mathfrak{t}$ 自身もその中に数える）により抑えられる．

そのような列に現れる項の最大の数を，項 $\mathfrak{t}$ の次数と呼ぶことにする．

この次数の定義は，容易にわかるように，次の帰納的な定義と同等である: ε-項を格納していないような ε-項は次数1を持つ．ε-項で，格納された全ての ε-項の次数が $\leq \mathfrak{k}$ で，その中の少なくとも1つの ε-項は次数 $\mathfrak{k}$ を持つようなものは，次数 $\mathfrak{k}+1$ を持つ．したがって，ε-項は常にそれに格納された ε-項より高い次数を持つことになる．

格納により次数の概念が得られたように，上位の関係により“階数”が導入される．**階数**は ε-表現一般に対し定義される: $\mathfrak{t}$ を ε-表現としよう．$\mathfrak{t}$ に始まって，他の ε-表現の上位にあるような ε-表現には，その下位にある ε-表現の1つが続くような ε-表現の列の全体を考える．

そのような列は有限個しかなく，おのおのの列についても，その中に現れる ε-表現の数は有限である．そのような列に現れる ε-表現の最大数を $\mathfrak{t}$ の階数と呼ぶ．

階数の定義は，次数と同様に帰納的に行うこともできる: ε-表現は，それの下位にある ε-表現が存在しないとき，階数1を持つという．ε-表現は，格納された全ての ε-表現の階数が $\leq \mathfrak{k}$ で，その中の少なくとも1つの ε-表現は階数 $\mathfrak{k}$ を持つとき，階数 $\mathfrak{k}+1$ を持つという．

この定義から明らかなように，ε-表現は，常にそれの下位にある ε-表現より高い階数を持つことになる．また，ある ε-項から1つ以上の自由変数を束縛変数に[38]変えることにより得られる ε-表現は，もとの ε-項と同じ階数を持つことも明らかである．さらに，ε-表現の構成要素として現れる ε-項や，その ε-項の下位にある ε-表現は，階数に影響を与えないことも容易にわかる．なぜなら，ε-項がそれ自身，ある ε-表現の下位にあるということは不可能であるし，ε-項が ε-表現 $\mathfrak{a}$ の構成要素で，ε-表現 $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{a}$ の下位にあるなら，ε-項はそれの外

[38]もちろん，この ε-項に現れないものにである（69 ページ参照）．

側にある ε-記号により束縛された変数を含むことはありえないから，この ε-項は（$\mathfrak{a}$ の中に現れる全ての箇所において）$\mathfrak{b}$ の構成要素として現れるか，$\mathfrak{b}$ の外側に現れるかのいずれかである．したがって，ε-表現の中に現れる ε-項を（それが現れる 1 つ以上の箇所で）他の ε-項と入れ換えても，全体の ε-表現の階数は変化しないことがわかる．

次数と階数の計算の例として，数論の記号による ε-項

$$\varepsilon_x\{[\varepsilon_y(0' = \varepsilon_z(z < y'')) = \varepsilon_y(x < y)] \vee [0 < \varepsilon_u((\varepsilon_z(z < u') < u) \,\&\, u < x)]\}$$

を考察してみよう．この項を $\mathfrak{t}$ と呼ぶことにする．$\mathfrak{t}$ に格納されている ε-項 は，

$$\varepsilon_y(0' = \varepsilon_z(z < y''))$$

のみで，これに格納されている ε-項は存在しないから，$\mathfrak{t}$ の次数は 2 であることがわかる．

$\mathfrak{t}$ の下位にあるのは，

$$\varepsilon_y(x < y) \quad \text{および} \quad \varepsilon_u(\varepsilon_z(z < u') \,\&\, u < x)$$

という ε-表現であるが，これらのうち最初のものは ε-表現を含んでおらず，したがって，階数 1 を持ち，2 番目のものは，

$$\varepsilon_z(z < u')$$

という ε-表現を下位に持つから，階数は 2 となる．したがって，$\mathfrak{t}$ の階数は 3 である．

もう 1 つの例として

$$\varepsilon_y[\varepsilon_x(x < \varepsilon_z(x < z)) < y]$$

という項を考えてみよう．これは，少し前に考察した論理式 $(E\,x)(E\,y)(x < y)$ から ε-記号により存在記号を除去する手続きの際に出てきたものである．

下位にある ε-表現はこの項には含まれないから，階数は 1 である．この項に格納された ε-項としては

$$\varepsilon_x(x < \varepsilon_z(x < z))$$

があるが，この項に格納された ε-項は存在しないから，考察している全体の項は次数 2 を持つことになる．

この例でわかることは，ε-項は，そこに格納された他の ε-項より小さな階数を持つことがありうるということである．つまり，上で考察した項は階数 1 だったが，そこに格納された ε-項の階数は 2 となっている．

以下で，次数と階数の概念を用いて，問題点となる論理式の正規化された導出からの除去可能性の論証を行う．

d) 一般の場合における問題点となる論理式の除去． 与えられた正規化された導出の問題点となる論理式が，全て同一の ε-項に属している特殊な場合には，このような問題点となる論理式は，ヒルベルトの除去法により，消去されることはすでにみた[39]が，今度はこの手法を一般の場合に拡張する．ヒルベルトの除去法では，与えられた正規化された $\mathfrak{E}$ の導出での問題点となる論理式

$$(\mathfrak{K}) \qquad \mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})), \ldots, \mathfrak{A}(\mathfrak{k}_{\mathfrak{n}}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))$$

から，まず論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1) \to \mathfrak{E}, \ldots, \mathfrak{A}(\mathfrak{k}_{\mathfrak{n}}) \to \mathfrak{E}$$

の導出を得，さらに，

$$\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1)} \,\&\, \ldots \,\&\, \overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_{\mathfrak{n}})} \to \mathfrak{E}$$

という論理式を得るのであった．この論理式と，上の $\mathfrak{n}$ 個の論理式から，命題計算により論理式 $\mathfrak{E}$ が得られる．

これらの $\mathfrak{n}+1$ 個の “部分証明” は，与えられた正規化された証明から，演繹定理により，論理式の前提部分を前に付けることと，証明の断片を要所に挿入することにより得られていたが，それ以外にも，$\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_{\mathfrak{r}}) \to \mathfrak{E}$ $(\mathfrak{r} = 1, \ldots, \mathfrak{n})$ という論理式を得るために，与えられた証明に現れる $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ を全て $\mathfrak{t}_{\mathfrak{r}}$ で置き換える必要があった．

以下で，ε-項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ に属す問題点となる論理式 $(\mathfrak{K})$ 以外にも，他の問題点となる論理式の存在する場合に同じ手法を用いることを試みる．

ここで，次の 2 点が問題となってくる．まず，$(\mathfrak{K})$ の論理式の除去の際に行われた置き換えにより，他の問題点となる論理式を ε-論理式から代入によって得られる形ではないものに変形してしまうという可能性があるが，その場合には，前出の手法により $\mathfrak{E}$ の導出を得ることができなくなってしまう．こういう

[39] 66 ページ，b) 参照．

ことが起きない場合でも，置き換えにより，新しい問題点となる論理式が生じてしまう可能性もあるため，この除去の手続きが必ず終了することは自明ではない．

したがって，問題点となる論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))$$

で，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ と異なる ε-項 $\mathfrak{t}$ に置き換えを施す際に，この論理式がどのような変形を受けるかを詳しく調べてみる必要があることがわかる．

1. 項 $\mathfrak{t}$ は問題点となる論理式において，$\mathfrak{k}$ の中のみに現れる場合（これは，$\mathfrak{t}$ が $\mathfrak{k}$ に等しい場合も含んでいるものとする）．この場合には，この論理式は置き換えの後にも依然として $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ に属す問題点となる論理式となっている．

2. 項 $\mathfrak{t}$ は論理式 $\mathfrak{A}(c)$ と，場合によっては $\mathfrak{k}$ の中に現れるが，この項は $\mathfrak{k}$ も $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ も構成要素として含まないような場合．この場合には，上の問題点となる論理式は，より詳しく書けば

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}(\mathfrak{t}), \mathfrak{t}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}), \mathfrak{t})$$

という形をしていることになる．$\mathfrak{t}$ は，項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{t})$ の構成要素となっており，この項に上の問題点となる論理式が属している．したがって，$\mathfrak{t}$ はこの項より低い次数を持つことになる．この場合，置き換えにより，上の問題点となる論理式は，

$$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}^*)$$

という項に属す別の問題点となる論理式に変換される．ここで，上の項は，ε-表現の階数に関するところで注意した[40]ように，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{t})$ と同じ階数を持つ．

3. $\mathfrak{k}$，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ のどちらかの項が $\mathfrak{t}$ に構成要素として含まれている場合．この場合には，$\mathfrak{t}$ は，$\mathfrak{s}(\mathfrak{k})$ あるいは $\mathfrak{s}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))$ の形をしており，$\mathfrak{A}(c)$ は $\mathfrak{B}(\mathfrak{s}(c))$ という形をしている．ここに，$\mathfrak{s}(c)$ は $\mathfrak{t}$ と同じ階数を持つある ε-項である．

この問題点となる論理式の属す項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ は，

$$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{s}(\mathfrak{x}))$$

---

[40] 72 ページ参照．

となる．これは ε-表現 $\mathfrak{s}(\mathfrak{x})$ の上位にあるから，$\mathfrak{s}(\mathfrak{x})$ より高い階数を持つことになる．ところが，$\mathfrak{s}(\mathfrak{x})$ は $\mathfrak{s}(\mathfrak{c})$ と同じ階数を持ち，$\mathfrak{s}(\mathfrak{c})$ は $\mathfrak{t}$ と同じ階数を持つのだったから，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ は $\mathfrak{t}$ より高い階数を持つことになる．

したがって，常に，問題点となる論理式の属す ε-項のうちで **一番階数の高いもの**に対して置き換えを行うように削除の手続きを適用することで，上の場合 3. を避けることができる．

このような置き換えの順序を守れば，ε-項 $\mathfrak{t}$ の他の項による置き換えにおいて，場合 1. と場合 2. のみが現れることが保証される．このことにより，まず問題点となる論理式が変形を受ける場合には，常に他の問題点となる論理式に変換される．さらに，このとき得られた問題点となる論理式は，変換前の問題点となる論理式と同じ ε-項に属すものか，あるいは，これと**同じ階数を持つ** ε-項に属すものとなる．さらに，ε-項 $\mathfrak{t}$ の置き換えにより，$\mathfrak{t}$ より次数の高くないおのおのの ε-項 $\mathfrak{a}$ に属す問題点となる論理式は，再び $\mathfrak{a}$ に属す ε-項に変換される．なぜなら，上の 2. の場合は，$\mathfrak{t}$ の代入により変形されてできた問題点となる論理式の属す ε-項の次数が $\mathfrak{t}$ の次数より低いときしか成立せず，1. の場合には，問題点となる論理式に属す ε-項は変化しないからである．

以上の考察により，与えられた正規化された論理式 $\mathfrak{E}$ の証明から，問題点となる論理式を全て除去することが，次のようにして可能になる: 問題点となる論理式の属す ε-項の階数のうちで，最大のものをとる．簡単に表現するために，ある問題点となる論理式の属す ε-項の階数を，この論理式の階数といい，同様にこのような ε-項の次数を，その問題点となる論理式の次数ということにする．$\mathfrak{m}$ を，与えられた証明の中に現れる問題点となる論理式の階数のうち，最大のものとする．$\mathfrak{t}$ を，ある問題点となる論理式の属す ε-項で，階数 $\mathfrak{m}$ を持ち，次数が $\mathfrak{n}$ となるものとする．$\mathfrak{t}$ に属す問題点となる論理式に我々の除去法を適用すれば，それにより再編成された $\mathfrak{E}$ の証明で，除去されなかった問題点となる論理式に相当する場所には，除去における置き換えにより，一般には複数の論理式が現れることになる．しかし，これらは全て問題点となる論理式 (つまり，ε-論理式への代入により生じる論理式) の形をしている．さらに，もとの問題点となる論理式に相当する場所に現れる複数の問題点となる論理式は，それと同じ階数を持ち，階数 $\mathfrak{m}$ を持つ問題点となる論理式（これは次数 $\leq \mathfrak{n}$ を持っていたのだった）のところには，同一の ε-項に属す複数の論理式が現れることになる．

この $\mathfrak{t}$ に属す問題点となる論理式の除去により，階数 $\mathfrak{m}$ を持つ ε-項の数を 1 つ減らすことができる．その際に，問題点となる論理式の階数は前にあったもののみである．したがって，初めに問題点となる論理式の属す階数 $\mathfrak{m}$ の ε-項が $\mathfrak{s}$ 個あれば，除去法を $\mathfrak{s}$ 回適用することにより，新しい問題点となる論理式の階数を付加せずに，階数 $\mathfrak{m}$ の問題点となる論理式を全て取り除くことができる．これにより，問題点となる論理式の異なる階数の個数を 1 つ減らす手続きが得られたことになるが，この手続きを繰り返し適用することにより，全ての問題点となる論理式を除去することができる．

以上により，第 1 ε-定理が証明できた．階数の概念による，この一般の場合の証明は，アッカーマン（WILHELM ACKERMANN）による．

e) 結果の拡張．　前述の証明で用いた方法により，応用のうえで重要なもう 1 つの結果が得られる．この結果は，我々の除去法を

$$(E\mathfrak{x}_1)\ldots(E\mathfrak{x}_\mathfrak{r})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r})$$

という形の論理式 $\mathfrak{E}$ で，存在記号 $(E\mathfrak{x}_1),\ldots,(E\mathfrak{x}_\mathfrak{r})$ 以外の量化詞，および ε-項の現れないようなものの導出に適用することで得られる．ここに，形式的体系 F，および公理 $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_\mathfrak{k}$ は前と同じ条件を満たしているものとする．また，前と同じように，一般性を失うことなく，論理式 $\mathfrak{E}$ は自由変数を含まないものとしてよい．まず，やはり前と同じように準備の過程を行う．量化詞の ε-記号による除去，導出の証明糸への分解，代入の初式への引き戻しと残っている自由変数の除去である[41]．

量化詞の除去により，終式 $\mathfrak{E}$，つまり $(E\mathfrak{x}_1)\ldots(E\mathfrak{x}_\mathfrak{r})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r})$ は，ある項 $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_\mathfrak{r}$ により，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_\mathfrak{r})$$

という形の論理式に変形される．このとき，これらの $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_\mathfrak{r}$ 項は自由変数を含まない．論理式 $\mathfrak{E}$ は自由変数を含んでおらず，$(E\mathfrak{x})\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$ という形の表現を $\mathfrak{B}(\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}))$ という表現で置き換える過程においても，自由変数は新しく付け加わらないからである．

---

[41] 64 ページ，a) 参照．

先に述べた準備過程での残りの操作では，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\mathfrak{r})$ は変形されない．仮定により，$\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{r})$ という表現は ε-記号を含まないから，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots \mathfrak{a}_\mathfrak{r})$ で ε-記号の現れるのは，項 $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\mathfrak{r}$ の中だけである．

以上により，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\mathfrak{r})$ の正規化された証明が得られた．残念ながら，これに我々の問題点となる論理式の除去法を，前出のようなやり方で適用することはできない．この除去法では，与えられた正規化された証明の終式が ε-記号を含まないという条件が本質的に用いられていたからである．しかしながら，除去法を少し修正して，終式が ε-項を含んでいる場合にも適用できるようにできる．これは，以下の考察により明らかである．$\mathfrak{C}$ を終式に持つ，正規化された証明が与えられたとしよう．$\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$ を，この証明での問題点となる論理式のうちで最大の階数を持ち，そのようなもののうちで最大の次数をもつものする．これに属す問題点となる論理式は，

$$(\mathfrak{K})\begin{cases} \mathfrak{B}(\mathfrak{k}_1) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})) \\ \quad\vdots \\ \mathfrak{B}(\mathfrak{k}_\mathfrak{n}) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})) \end{cases}$$

であるとしよう．このとき，前とまったく同様に，ヒルベルトの手法を用いて，$(\mathfrak{n}+1)$ 個の “部分証明” を得ることができる[42]．しかしながら，これらの部分証明は，この場合一般には，

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{k}_1) \to \mathfrak{C}, \ldots, \quad \mathfrak{B}(\mathfrak{k}_\mathfrak{n}) \to \mathfrak{C}, \quad \overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{k}_1)} \,\&\, \ldots \,\&\, \overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{k}_\mathfrak{n})} \to \mathfrak{C}$$

という終式を持っていない．最初の $\mathfrak{n}$ 個の部分証明では，$\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$ という項の置き換えが行われていて，$\mathfrak{r}$ 番目の部分証明では，$\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$ は $\mathfrak{k}_\mathfrak{r}$ と置き換えられるが，その際に $\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$ という項を含んでいないとは限らないような $\mathfrak{C}$ も変形される可能性があるからである．$(\mathfrak{n}+1)$ 番目の部分証明だけは，置き換えなしで得られるので，$\mathfrak{C}$ が変形されずに残っていることが保証される．

したがって，これらの部分証明は，一般には，

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{k}_1) \to \mathfrak{C}_1, \ldots, \quad \mathfrak{B}(\mathfrak{k}_\mathfrak{n}) \to \mathfrak{C}_\mathfrak{n}, \quad \overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{k}_1)} \,\&\, \ldots \,\&\, \overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{k}_\mathfrak{n})} \to \mathfrak{C}$$

という形の終式を持つことになる．ここに，$\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_\mathfrak{n}$ は，$\mathfrak{C}_\mathfrak{r}$ $(\mathfrak{r} = 1, \ldots, \mathfrak{n})$ において，$\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$ の代わりに $\mathfrak{k}_\mathfrak{r}$ が現れるという点で，$\mathfrak{C}$ と異なる可能性のある論理式となっている．

---

[42] 73 ページ参照．

これらの $(\mathfrak{n}+1)$ 個の論理式からは，(一般には) $\mathfrak{C}$ ではなく，

$$\mathfrak{C} \vee \mathfrak{C}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{C}_\mathfrak{n}$$

が導出可能となる．なぜなら，この離接を $\mathfrak{D}$ で表すことにすれば，

$$\mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{D}, \quad \mathfrak{C}_2 \to \mathfrak{D}, \ldots, \quad \mathfrak{C}_\mathfrak{n} \to \mathfrak{D}, \quad \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$$

という論理式が命題論理により導出可能だから，$(\mathfrak{n}+1)$ 個の部分証明から，命題論理により，

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{k}_1) \to \mathfrak{D}, \ldots, \quad \mathfrak{B}(\mathfrak{k}_\mathfrak{n}) \to \mathfrak{D}, \quad \overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{k}_1)} \,\&\, \ldots \,\&\, \overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{k}_\mathfrak{n})} \to \mathfrak{D}$$

という論理式が得られ，これから $\mathfrak{D}$ が得られるからである．

このようにして，問題点となる論理式の除去法のちょっとした変形が得られた．ここで，終式が ε-式を含まない場合との唯一の違いは，ある特定の ε-項に属する問題点となる論理式を除去する手続きにおいて，終式の "離接による分裂" が起こる場合があることである．つまり，そのような除去の段階で，今までの終式 $\mathfrak{C}$ の代わりに離接 $\mathfrak{C} \vee \mathfrak{C}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{C}_\mathfrak{n}$ が現れる可能性がある．ここに，おのおのの $\mathfrak{C}_\mathfrak{r}$ は $\mathfrak{C}$ で，そこに現れる 1 つの ε-項を（それの $\mathfrak{C}$ に現れる全ての箇所について）置き換えることにより得られている．

この変形された除去法を，問題としている論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\mathfrak{r})$ の正規化された証明に適用すれば，問題点となる論理式を含まないような論理式 $\mathfrak{E}^*$ の証明が得られる．ここに，$\mathfrak{E}^*$ は $\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\mathfrak{r})$ から——それが除去法の適用により変形された場合には——幾つかの離接による分裂の結果として得られる．

この論理式が実際にはどんな形を持つことになるかをみてみよう．1 回の離接による分裂により，終式

$$\mathfrak{A}_0 \vee \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_\mathfrak{p}$$

が得られる．ここに，$\mathfrak{A}_0$ は，$\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\mathfrak{r})$ で，他の離接節のこれと異なるのは，$\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\mathfrak{r}$ という項が他の項で置き代えられているという点のみである．論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\mathfrak{r})$ の中で，$\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\mathfrak{r}$ という項の外側には ε-記号は現れないからである．したがって，論理式 $\mathfrak{A}_0 \vee \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_\mathfrak{p}$ は，ある項 $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_\mathfrak{r}$ に対し，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_\mathfrak{r})$$

という形をしている要素の離接となっている．この終式の形状は，これ以降の分裂においても保たれる．$\mathfrak{A}(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_\mathfrak{r})$ という形をした離接節の1つは，そこに現れる ε-項の他への置き換えにより，ある項 $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_\mathfrak{r}$ に対し，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_\mathfrak{r})$$

という形の離接節が生じるわけだが，このような要素を持つ離接論理式の離接は，再び同様な離接節を持った離接論理式となるからである．

全ての問題点となる論理式を全て除去して，残っている ε-項のうち，一番内側にあるものを全て変数 a で置き換えた後も，終式の上のような形状は保たれている．

以上により，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1^{(1)}, \ldots, \mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(1)}) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{s})}, \ldots, \mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{s})})$$

という形をした論理式の導出が得られた．ここに，$\mathfrak{t}_1^{(1)}, \ldots, \mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{s})}$ はある項である．さらに，この導出は公理 $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_\mathfrak{k}$ から初等計算により，つまり $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_\mathfrak{k}$ の自由変数への代入と命題計算の適用によりなされている．

したがって，次のような**第1 ε-定理の拡張**が得られたことになる:

$$(E\,\mathfrak{x}_1)\ldots(E\,\mathfrak{x}_\mathfrak{r})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{r})$$

という論理式で $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{r}$ 以外には束縛変数の現れないようなものの導出が与えられ，この導出は，束縛変数を含まないような公理 $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_\mathfrak{k}$ から，述語計算と場合によっては ε-論理式の付加によりなされているとする．

このとき，論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1^{(1)}, \ldots, \mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(1)}) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{s})}, \ldots, \mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{s})})$$

の公理 $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_\mathfrak{k}$ からの，自由変数を持つ初等計算のみによる導出を得ることができる．ここに，$\mathfrak{t}_1^{(1)}, \ldots, \mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(1)}$，$\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{s})}, \ldots, \mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{s})}$ は，ε-記号を含まない項である．

ここで，この終式から，基本論理式 (b) と述語計算により，もとの論理式

$$(E\,\mathfrak{x}_1)\ldots(E\,\mathfrak{x}_\mathfrak{r})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\mathfrak{r})$$

が，再び容易に得られることを注意しておく．

3.4 無矛盾性の証明

a) 一般的な無矛盾性定理. 第1 ε-定理は，そもそも，無矛盾性の研究への応用を念頭において証明した[43]のだったが，この応用をここで考察することにする．この定理の意義は，束縛変数を持たない本来の公理からなる公理系の述語計算と ε-公理での無矛盾性の問題を，自由変数を持つ初等計算におけるその公理系の無矛盾性の問題に帰着できるということである．

これの有用性を明らかにするために，簡単な例として，原書 I, §6 ですでに詳しく考察した形式体的公理系を再び取り上げてみよう[44]．この体系は，述語計算に，述語記号 $=$，$<$，個体記号 0，関数記号としてのダッシュ，それに次の公理を付け加えて得られるものであった．等号の公理:

$$(J_1) \qquad a = a$$

$$(J_2) \qquad a = b \to (A(a) \to A(b))$$

公理 $(<_1)$，$(<_2)$，$(<_3)$:

$$\overline{a < a}, \quad a < b \,\&\, b < c \to a < c, \quad a < a',$$

およびペアノの公理 (P_1)，(P_2):

$$a' \neq 0, \quad a' = b' \to a = b.$$

この公理系——ここでは，これを (S) と呼ぶことにしよう——の無矛盾性証明は，まず束縛変数の現れない導出について考察した後，任意の述語計算の導出に関する一般の場合を考察することでなされた．証明が2部からなっていたのは単に歴史的な理由からである．しかし，我々は，ε-定理を持ってくることで，まず証明された特殊な場合についての証明に，別の無矛盾性証明をつなぐことができる．この新しい無矛盾性証明は，以下の点を考慮すれば容易に得られる．

1. (S) の無矛盾性の主張は，(S) **で導出可能な数式論理式は全て真な論理式であるという**，より積極的な命題に強めることができる．ここに数式論理式と

---

[43] 52 ページ参照.

[44] 原書 I, 219 ページ以降参照.

は，数表記の間の等式や不等式[45]，または，これらの論理式から命題計算の演算により得られる論理式のことであった．数式論理式の真偽は，数式の算術的解釈と命題計算の演算の真偽値関数としての解釈により，確定するのであった[46]．

2. (S) の公理系は束縛変数を含んでいない．さらに，公理 (J_2) 以外は全て本来の公理である．そして，原書 I，§7 で示したように，(J_2) は

$$\text{(i)}\begin{cases} a = b \to (a = c \to b = c) \\ \quad a = b \to a' = b' \\ a = b \to (a < c \to b < c) \\ a = b \to (c < a \to c < b) \end{cases}$$

という本来の公理で置き換えることができる[47]．(S) にこの置き換を施すことによって得られる同等な公理系を (S^*) と呼ぶことにしよう．

以上により，(S^*) で導出可能な数式論理式は，全て真であることを証明できればよいことがわかる．ここで，(S^*) の公理は全て束縛変数を持たない本来の公理だから，ε-定理により，(S^*) からの数式論理式の導出から束縛変数を取り除くことができる．したがって証明のためには，(S^*) から，自由変数をもつ初等計算により導出可能な数式論理式が全て真な論理式であることが示せればよい[48]．

以上で，一般の場合の，初等計算での導出の場合への帰着がなされたことになる．証明の残りは，公理系 (S^*) から初等計算により導出可能な数式論理式が全て真となることを示すことだが，これは原書 I，§6 での考察のように，以下の事実から容易に導かれる．

1. 与えられた (S^*) の公理からの初等計算による導出に対し，証明図の証明糸への分解のプロセス，代入の初式への引き戻し，および自由変数の除去を施すことにより，全ての初式は恒真な命題計算の論理式，または (S^*) の公理の 1 つへの代入により得られるものとなっており，全ての論理式は数式論理式で，証明の流れは繰り返しと推論図式のみからなっているような（拡張された意味での）証明図を得ることができる．

---

[45] 不等式とは，$\mathfrak{s} < \mathfrak{t}$ の形をした論理式のことであった．原書 I，228 ページ参照．

[46] 原書 I，228 ページ参照．

[47] 原書 I，382–384 ページ参照．

[48] この ε-定理の応用は，初等導出の定理に対応する．63 ページ参照．

2. 恒真な論理式から代入によって得られた数式論理式は，全て真である．(S^*) の公理の 1 つから数表記の自由変数への代入によって得られた数式論理式は，全て正しい．$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ が真な数式論理式ならば，$\mathfrak{B}$ も真な論理式である．

この (S^*) の，したがって (S) の無矛盾性証明は，原書 I，§6 で (S) の無矛盾性の証明をしたときの還元法に比べて，より一般に応用が可能であるという長所がある．なぜなら，そこでの還元法は，(S) の記号により表現できる算術的関係で束縛変数を用いて（しかし，論理式変数は用いずに）表せるものは，束縛変数を用いずにも表せるという事実に依存していた．例えば，

$$(Ex)(a < x \,\&\, x < b)$$

という関係は，$a' < b$ により，また

$$(x)(a < x \vee x < b \vee x = c)$$

という関係は，

$$(a < b) \vee (a = b \,\&\, a = c)$$

により，という具合いである．このような束縛変数の除去可能性は，ごく特殊な体系のみでしか成立しないが，我々の ε-定理による束縛変数を持たない論理式の導出からの束縛変数の除去可能性は，束縛変数を含まない述語計算での本来の公理のみからなるような体系の全てに対して成り立つ．

公理系 (S^*) の特別な，つまりそこに現れる変数の形態以外の事柄に依存するような性質で，上の無矛盾性証明において用いられていたのは，これらの公理の全てに対し，自由変数へ任意の数表記を代入したときに真な数式論理式が得られるということのみであった．このような公理系の性質を，公理が“確証可能な論理式”であるといい表すことにする[49]．

上の確証可能性の概念は，まだ不必要に制限されている．自由変数を含まないような項——このようなものを略して“無変数項”と呼ぶことにしよう——が全て数表記であるような体系に対してしか定義できないからである．この概念の帰納的関数に対応する関数記号が用いられている場合への拡張は，すでに

[49] 原書 I，§6，237 ページ参照．**確証可能**という言い回しは，問題となっている論理式が，意味解釈において，その恒真は確証できないにしても，全ての特定の場合については確証（確認）することはできるというような一般的な形をした数学の命題に対応することから採られた．

原書 I, §7 で考察した[50]. しかし，実際は 0 とダッシュ（あるいはそれに相当する他の記号）が特殊な役割を果たしている数論的形式体系に制限して考える必然性はまったくないのである．もっと一般的に，無変数項を持つ形式的体系で，この体系での**無変数な初等論理式の真偽値の確定法**に基づいて，"確証可能性" を定義することができる．ここに，真偽値の確定法とは，それにより与えられたこの体系での無変数な初等論理式が "真" である，あるいは "偽" であるという決定が一意的にできるようなものをいう．

このような無変数な初等論理式の真偽値の確定法が与えられたときには，命題計算の記号演算を真偽値関数に解釈することで，ただちに全ての無変数論理式の真偽値の確定法を得ることができる．これにより，全ての無変数な論理式の真偽を一意的に決めることができ，全ての恒真な命題論理の論理式から得られる無変数論理式は，全て真となる．

ここで，その変数に任意の無変数項を代入したとき真の論理式が得られるような自由変数のみを変数として含む論理式を，"確証可能な" 論理式と定義する．

この定義により，以下のような一般的な無矛盾性に関する定理（"無矛盾定理"）を記述することができる．

F を，述語計算に幾つかの個体記号，述語記号，関数記号，および幾つかの本来の公理を付け加えて得られる形式的体系とする．F での無変数の初等論理式に対し，その真偽値を一意に決定する手続きが与えられているとする．また，全ての公理は束縛変数を含んでおらず，確証可能とする．このとき，この体系は，導出可能な無変数の数論理式は全て真であるという強い意味において，無矛盾である．

この定理の論証は，公理系 (S^*) の無矛盾性証明で ε-定理を用いたときの議論とまったく同様にしてできる．

幾つかの注目すべき事柄について補っておこう:

1. F で導出可能な自由個体変数を唯一の変数として含むような論理式は，確証可能である．

なぜなら，自由変数を任意の無変数項で置き換えることは，代入とみなせるが，置き換えた結果は，再び F で導出可能な論理式となるので，我々の定理の主張により真の論理式となるからである．

---

[50]原書 I, §7, 297 ページ参照.

2. F で導出可能な論理式で

$$(E\mathfrak{x}_1)\dots(E\mathfrak{x}_n)\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_n)$$

という形をしていて，$\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_n$ 以外には変数を含んでいないようなものについては，その導出を基にして，適当な項 $\mathfrak{t}_1,\dots,\mathfrak{t}_n$ をみつけて，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1,\dots,\mathfrak{t}_n)$$

を真の論理式になるようにすることができる．

このことは，すでに証明した第 1 ε-定理の拡張から導かれる．これを今の場合に応用すれば，

$$(E\mathfrak{x}_1)\dots(E\mathfrak{x}_n)\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_n)$$

の導出から，束縛変数の除去の方法により，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1^{(1)},\dots,\mathfrak{k}_n^{(1)})\vee\dots\vee\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1^{(s)},\dots,\mathfrak{k}_n^{(s)})$$

という形の論理式で，F の公理から初等計算により導出可能なものが得られる．ここに $\mathfrak{k}_1^1,\dots,\mathfrak{k}_n^s$ は，ε-記号を含まない，つまり自由変数と F の個体記号，および関数記号からなるような項である．

この論理式に自由変数が含まれるときには，それらを全て同一の個体記号で置き換えれば，再び F で導出可能な論理式が得られるが，この論理式は変数を含まないから，真の論理式である．したがって，これらの離接節のうち，少なくとも 1 つは真の論理式でなければならないが，このような論理式は，ある無変数項 $\mathfrak{t}_1,\dots,\mathfrak{t}_n$ により，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1,\dots,\mathfrak{t}_n)$$

と表されている．

3. F で導出可能な論理式が

$$(\mathfrak{x}_1)\cdots(\mathfrak{x}_m)(E\mathfrak{y}_1)\dots(E\mathfrak{y}_n)\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_m,\mathfrak{y}_1,\dots,\mathfrak{y}_n)$$

という形をしていて，$\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_m$，$\mathfrak{y}_1,\dots,\mathfrak{y}_n$ 以外には変数を含まないときには，この論理式の導出を基にして，与えられた任意の無変数項の組 $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_m$ に対し，無変数項 $\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n$ で，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_m,\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n)$$

が真の論理式となるようなものをみつけることができる.

これは，任意の項の組 $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\mathfrak{m}$ に対し，論理式

$$(E\,\mathfrak{y}_1)\ldots(E\,\mathfrak{y}_\mathfrak{n})\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_\mathfrak{m},\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{n})$$

が，基本論理式 (a) を用いることにより，論理式

$$(\mathfrak{x}_1)\cdots(\mathfrak{x}_\mathfrak{m})(E\,\mathfrak{y}_1)\ldots(E\,\mathfrak{y}_\mathfrak{n})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{m},\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{n})$$

から導出できるという事実を用いることで，上の 2. から導ける.

4. 上に述べた無矛盾性定理と 1.，2.，3. は，形式的体系 F に ε-記号と ε-論理式が含まれる場合にも成り立つ.

第1 ε-定理での証明法では，いずれにしても，まず量化詞を除去するために，ε-記号と ε-論理式を考察の対象となっている体系に付け加えることになるからである．すでにみたように，ι-規則で表される全ての定義法，ならびに存在命題の記号による整約[51]は，ε-論理式により統一的な形式化が与えられるということを考え合わせると，この注意は重要であることがわかる.

上で証明した無矛盾性定理と 1.–4. を合わせたものを略して “無矛盾定理” と呼ぶことにする.

b) 幾何学への応用.　上で得られた無矛盾定理により，述語計算で記述され，公理系が有限的算術的な解釈のできるような公理的理論が無矛盾であることを示すための手段が得られた．無矛盾性は，この場合，ε-論理式も含んだものに対して得られるのであった.

有限的な解釈が存在するだけでは，有限的な意味での，公理系の無矛盾性の保証がを得られないのは，この有限的な解釈が証明に対してもなされているわけではないからである．述語計算の中に形式化された推論方法の意味の解釈には有限的でない要素が必要となる．しかし，無矛盾定理により，これらの推論方法は問題ないことを認識することができるようになる.

これが具体的にどのように行われるかをみるために，初等幾何の公理系を考察してみよう．これは，それ自身としてもまた，興味深い例である．ここに，初等幾何とは，結合公理，順序公理，合同公理，平行線公理に，連続性公理を加えて得られる幾何のことである.

---

[51] 49 ページ参照.

簡単のために，ここでは平面幾何を考えることにする．ここでの手法を立体幾何へ適用することは容易である．

我々の無矛盾定理が直接応用できるためには，公理系を整約された形でつくらなければならない．結合公理と順序公理については，原書 I，§1 での形のものから，どのような形の整約された公理が得られるか，すでに，この章の I 1.–4.，II 1.–5. で示した[52]．

合同公理の形式化は，R.L. Moore によって与えられた形のものを用いるのがよい[53]．そこでは，線分の合同については本質的にはヒルベルトの公理を採用しているが，角の合同の概念を導入することは避けている．線分の合同は 2 組の点の組としての 4 つの点の間の関係として捉えられるが，これを

$$ab \equiv cd$$

という記号で表すことにする（「ab は cd と合同」と読む）．この合同関係は，形式的には以下の公理で特徴づけられる:

$$
\begin{aligned}
&ab \equiv ba \,\&\, aa \equiv bb,\\
&ab \equiv pq \,\&\, cd \equiv pq \;\rightarrow\; ab \equiv cd,\\
&a \neq b \,\&\, c \neq d \;\rightarrow\; (E\,x)(Zw(c,d,x) \,\&\, ab \equiv cx),\\
&Gr(a,b,c) \,\&\, \overline{Zw(a,b,c)} \,\&\, ab \equiv ac \;\rightarrow\; b = c,\\
&Zw(b,a,c) \,\&\, Gr(q,p,r) \,\&\, ab \equiv pq \,\&\, bc \equiv qr \;\rightarrow\; ac \equiv pr,\\
&\overline{Gr(a,b,c)} \,\&\, \overline{Gr(p,q,r)} \,\&\, Zw(b,a,d) \,\&\, Zw(q,p,s)\\
&\qquad\qquad \&\, ab \equiv pq \,\&\, bc \equiv qr \,\&\, ac \equiv pr \,\&\, bd \equiv qs \;\rightarrow\; cd \equiv rs.
\end{aligned}
$$

これらのうち，最初のものは，線分の長さが終点の順序に依存せず，本質的でない線分（複合点）は互いに合同であることを表している[54]．2 番目のものは，第 3 の線分と合同な 2 つの線分は互いに合同であるという命題を表している（ヒルベルトの『幾何学の基礎』での公理 III 2）．3 番目のものは線分の転写の可能性（ヒルベルトの公理 III 1）を，4 番目のものは線分の転写の一意性（これは，ヒルベルトの公理系では角の転写の一意性から導かれる）を表している．5

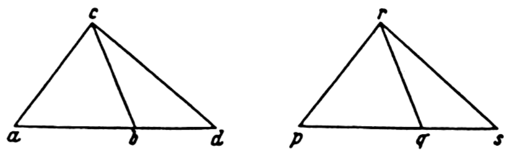
[52] 51 ページ参照．

[53] “Sets of metrical hypotheses for geometry”, *Trans. Amer. Math. Soc.* 9: 487–512 (1908) 参照．

[54] 複合点の間の合同を公理として加えたのは形式的な完全性のためにすぎない．

番目のものは線分の加法性（ヒルベルトの公理 III 3）を表し，最後のものは，次のような三角合同定理である:

2つの三角形で，対応する辺の長さが等しく，対応する辺を対応する角から同じ長さの線分に延長したとき，得られた終点と延長された線分の対角とを結んで得られる線分は互いに等しい．



この三角合同定理を，前の線分の合同の定理と組み合わせることにより，角の合同の定義，および線分と角の "大小関係"，"直角"，"鋭角"，"鈍角" の概念を適当に導入することにより，平行線の公理に依存しないような標準的な初等幾何の定理の全てが導かれる．このことは J.L. DORROH により，最初に完全な形で示された[55]．

3番目の存在定理の形をした合同定理により，線分の拡張可能性を主張する公理 II 4. は不必要になる．そこで，この公理を除いて考えることにするが，それに伴って関数記号 $\varphi(a,b)$ もいらなくなる．

平行線公理は，ヒルベルトのヴァージョンでは，平面幾何においては「直線 a 上にない，ある点を通る直線で a と交わらないものはたかだか1つしかない」という命題である．これは，「直線 a 上にない点 P を通る2つの異なる直線の直線のうち，少なくとも1つは a と交わる」と表すこともできる．さらに，この命題から，P は a 上にないという条件をはずしてかまわない．

関係 Gr を用いると，この公理は次のように表すことができる．

$$\overline{Gr(a,b,c)} \rightarrow (E\,x)(Gr(d,e,x)\,\&\,(Gr(a,b,x) \vee Gr(a,c,x))).$$

[55] "Conserning a set of metrical hypotheses for geometry", *Ann. of Math., 2. Serie* 29: 229–231 (1928). MOORE は，彼によって定式化された合同公理が，もう1つの連続性公理を用いることにより十分なものになっていることを示した．さらに，彼は後者の代わりに，どの線分も中間点を持つことを主張する定理を用いれば十分であることを示した．この定理は DORROH の論文では，MOORE の合同公理から証明されている．

（説明: d と e を通る直線が，与えられた直線で[56]，a は任意の点である．この点を通り，それぞれ b と c を通る 2 つの直線が与えられている．このとき，これらの 2 つの直線のうち少なくとも 1 つは d と e を通る直線上のある点 x を通るというのが命題の主張である.)

後は，等号の公理を本来の公理の形で付け加えるだけである．まず

$$a = a$$

$$a = b \to (a = c \to b = c)$$

という公理を付け加え，さらに，基本述語 Gr，Zw，$\equiv$ に属す等号の公理を付け加える．ここで，本来ならこれらの述語のパラメータの数に依存して，10 個の論理式を書かなければいけないわけであるが，公理 I 1. により，

$$Gr(a, b, c) \to Gr(b, a, c) \,\&\, Gr(a, c, b)$$

という論理式を採用し，さらに公理 II 3. からただちに導かれる，

$$Zw(a, b, c) \to Zw(a, c, b)$$

という論理式により，Gr と Zr については，

$$a = b \to (Gr(a, c, d) \to Gr(b, c, d))$$
$$a = b \to (Zw(a, c, d) \to Zw(b, c, d))$$
$$a = b \to (Zw(c, d, a) \to Zw(c, d, b))$$

を採用すれば十分である[57]．また，上の 3 つの論理式のうちの 2 番目については，公理 II 1.

$$Zw(a, b, c) \to Gr(a, b, c),$$

および，論理式

$$Zw(a, b, c) \to a \neq b \,\&\, a \neq c \,\&\, b \neq c$$

$$Gr(a, b, c) \,\&\, a \neq b \,\&\, a \neq c \,\&\, b \neq c \to Zw(a, b, c) \vee Zw(b, a, c) \vee Zw(c, a, b)$$

---

[56] この幾何学的解釈は $d \neq e$ の場合にのみ意味を持つが，$d = e$ の場合には公理 $Gr(a, a, b)$ により，この含意論理式は自明に成り立つ．

[57] 原書 I，§7，390 ページの要約参照．

の導出可能性により，除外してかまわない．述語 ≡ については，公理

$$ab \equiv ba, ab \equiv pq \,\&\, cd \equiv pq \;\to\; ab \equiv cd$$

により，

$$a = b \;\to\; ac \equiv bc$$

という等号の公理だけで十分である．

後は，付け加えられた 2 つの存在公理を整約された形にすればよい．

$$a \neq b \,\&\, c \neq d \;\to\; (E\,x)(Zw(c,d,x) \,\&\, ab \equiv cx)$$

という公理に対しては，関数記号 $\varphi(a,b,c,d)$ を導入することで，

$$a \neq b \,\&\, c \neq d \;\to\; Zw(c,d,\varphi(a,b,c,d)) \,\&\, ab \equiv c\varphi(a,b,c,d)$$

が得られる．平行線公理に対する論理式を整約された論理式に変形するためには，一般的な方法によれば，5 つの変数を持つ関数記号を導入しなければならない．しかし，ここでは，もう少し簡単なやり方が可能である．存在論理式の記号による整約は，顕現的定義とともに，ε-記号を用いることで得られたことを思い出そう．

一般的な方法では，この論理式の記号による整約のために，

$$\varepsilon_x(Gr(d,e,x) \,\&\, (Gr(a,b,x) \vee Gr(a,c,x)))$$

という ε-記号を導入することになるが，これの代わりに，

$$\varepsilon_x(Gr(a,b,x) \,\&\, Gr(c,d,x))$$

により同様の効果を得ることができる．なぜなら，

$$\xi(a,b,c,d) = \varepsilon_x(Gr(a,b,x) \,\&\, Gr(c,d,x))$$

と定義すれば，平行線の公理の論理式により，論理式

$$(E\,x)A(x) \;\to\; A(\varepsilon_x A(x))$$

から，

$$\overline{Gr(a,b,c)} \;\to\; (Gr(d,e,\xi(a,b,c,d,e)) \,\&\, Gr(a,b,\xi(a,b,c,d,e)))$$
$$\vee\, (Gr(d,e,\xi(a,b,c,d,e)) \,\&\, Gr(a,c,\xi(a,b,c,d,e)))$$

が容易に導けるが，逆に，この論理式から，述語計算により平行線の公理の論理式を再び得ることもできるからである．

幾何学的には，$\xi(a,b,c,d)$ の定義は，$\xi(a,b,c,d)$ が 直線 ab と cd の共通点があるなら，その 1 つを表していると解釈することができる．特に，ab と cd が，交点を持つ 2 つの異なる直線であるときには，$\xi(a,b,c,d)$ はその交点を表している．

この幾何学的解釈により，5 番目の順序公理の記号による整約も，関数 $\xi(a,b,c,d)$ により，関数記号 $\psi(a,b,c,d,e)$ を用いずにできることがわかる．この公理は，ある直線が三角形 abc の辺 ab と，a と b との間で交わっているとき，辺 ac か，辺 bc と交わることを主張するものであった．この命題は，「a，b，c が同一直線上になく，p が a と b との間にあり，pq が ab と異なる直線で c を通らないなら，直線 pq と ac の交点が a と c の間にあるか，または直線 pq と bc の交点が b と c の間にある」と記述することもできる．

我々の記号を使うと，この命題は

$$
(\xi_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{Gr(a,b,c)} \,\&\, Zw(p,a,b) \,\&\, \overline{Gr(q,a,b)} \,\&\, \overline{Gr(c,p,q)} \\ \to (Gr(p,q,\xi(p,q,a,c)) \,\&\, Zw(\xi(p,q,a,c),a,c)) \\ \vee (Gr(p,q,\xi(p,q,b,c)) \,\&\, Zw(\xi(p,q,b,c),b,c)) \end{array} \right.
$$

という論理式で表現できる．実際，上の論理式 (ξ_1) は，ε-論理式と $\xi(a,b,c,d)$ の定義により，もとの公理 II 5 の論理式と演繹的に同値である．この論理式

$$
\begin{gathered}
(x)(y)(z)(u)(v)\{\overline{Gr(x,y,z)} \,\&\, Zw(u,x,y) \,\&\, \overline{Gr(v,x,y)} \,\&\, \overline{Gr(z,u,v)} \\
\to (E\,w)(Gr(u,v,w) \,\&\, (Zw(w,x,y) \vee Zw(w,y,z)))\}
\end{gathered}
$$

は，束縛変数 x，y，z，u，v を自由変数に変えて，述語計算の規則による変形を施すことにより，

$$
\begin{gathered}
\overline{Gr(a,b,c)} \,\&\, Zw(p,a,b) \,\&\, \overline{Gr(q,a,b)} \,\&\, \overline{Gr(c,p,q)} \\
\to (E\,w)(Gr(p,q,w) \,\&\, Zw(w,a,c)) \vee (E\,w)(Gr(p,q,w) \,\&\, Zw(w,b,c))
\end{gathered}
$$

となる．この式は，述語計算により (ξ_1) から容易に導くことができるが，一方，この論理式からは，$\xi(a,b,c,d)$ の定義，公理 I 1.–3.，II 1.–3.，等号の公理，および ε-論理式により導出可能な論理式

$$
\begin{aligned}
&(E\,w)(Gr(p,q,w) \,\&\, Zw(w,d,c)) \,\&\, \overline{Gr(c,p,q)} \\
&\qquad \to Gr(p,q,\xi(p,q,d,c)) \,\&\, Zw(\xi(p,q,d,c),d,c)
\end{aligned}
$$

を用いることにより，(ξ_1) を導出することができる．

以上により，我々の幾何学の公理系に含まれる存在公理を，個体変数 α，β，γ，および関数記号 $\varphi(a,b,c,d)$，$\xi(a,b,c,d)$ の導入により，整約することができた．これにより得られた，整約された公理系は，次のようになる:

等号の公理:

$$
\begin{aligned}
&a = a,\\
&a = b \rightarrow (a = c \rightarrow b = c),\\
&a = b \rightarrow (Gr(a,c,d) \rightarrow Gr(b,c,d)),\\
&a = b \rightarrow (Zw(c,d,a) \rightarrow Zw(c,d,b)),\\
&a = b \rightarrow ac \equiv bc.
\end{aligned}
$$

結合公理:

$$
\begin{aligned}
&Gr(a,a,b),\\
&Gr(a,b,c) \rightarrow Gr(b,a,c) \,\&\, Gr(a,c,b),\\
&Gr(a,b,c) \,\&\, Gr(a,b,d) \,\&\, a \neq b \rightarrow Gr(a,c,d),\\
&\overline{Gr(\alpha,\beta,\gamma)}.
\end{aligned}
$$

順序公理:

$$
\begin{aligned}
&Zw(a,b,c) \rightarrow Gr(a,b,c),\\
&\overline{Zw(a,b,b)},\\
&Zw(a,b,c) \rightarrow Zw(a,c,b) \,\&\, \overline{Zw(b,a,c)},\\
&\overline{Gr(a,b,c)} \,\&\, Zw(p,a,b) \,\&\, \overline{Gr(q,a,b)} \,\&\, \overline{Gr(c,p,q)}\\
&\rightarrow (Gr(p,q,\xi(p,q,a,c)) \,\&\, Zw(\xi(p,q,a,c),a,c))\\
&\vee (Gr(p,q,\xi(p,q,b,c)) \,\&\, Zw(\xi(p,q,b,c),b,c)).
\end{aligned}
$$

合同公理:

$$
\begin{aligned}
&ab \equiv ba \,\&\, aa \equiv bb,\\
&ab \equiv pq \,\&\, cd \equiv pq \rightarrow ab \equiv cd,\\
&a \neq b \,\&\, c \neq d \rightarrow Zw(c,d,\varphi(a,b,c,d)) \,\&\, ab \equiv c\varphi(a,b,c,d),\\
&Gr(a,b,c) \,\&\, \overline{Zw(a,b,c)} \,\&\, ab \equiv ac \rightarrow b = c,\\
&Zw(b,a,c) \,\&\, Zw(q,p,r) \,\&\, ab \equiv pq \,\&\, bc \equiv qr \rightarrow ac \equiv pr,\\
&\overline{Gr(a,b,c)} \,\&\, \overline{Gr(p,q,r)} \,\&\, Zw(b,a,d) \,\&\, Zw(q,p,s) \,\&\, ab \equiv pq \,\&\, bc \equiv qr\\
&\qquad \&\, ac \equiv pr \,\&\, bd \equiv qs \rightarrow cd \equiv rs.
\end{aligned}
$$

平行線公理:

$$\overline{Gr(a,b,c)} \to (Gr(d,e,\xi(a,b,d,e))\,\&\,Gr(a,b,\xi(a,b,d,e)))$$
$$\vee(Gr(d,e,\xi(a,c,d,e))\,\&\,Gr(a,c,\xi(a,c,d,e))).$$

注意.　関数記号 $\varphi(a,b,c,d)$ と $\xi(a,b,c,e)$ については，それらに対応する等号の公理は必要でない．存在公理の記号的整約は，ここで考察している，もとの形の幾何学の公理系が，述語計算と ε-公理で形式化された推論法のもとで無矛盾であることを示すための補助手段として使われているにすぎないわけだが，一方，上の公理系は，述語計算により，それから，もとの公理系が導出可能であるという意味で，すでに十分なものとなっている[58]．

上記の公理系の無矛盾性を，我々の無矛盾定理により示すためには，無変数な初等論理式の真偽値を一意的に決定する手続きで，それから公理系が確証可能であることが示せるようなものを与えることができればよい．そのような手続きは，解析幾何により得ることができる．解析幾何の数の領域としては，ここでは，1 から出発して，4 則演算と，正の数の平方根をとる演算によって得られる数の全体の領域を用いる．

この数の領域——これを Q で表すことにする——での計算は有限的な手続きで実行できる．解析幾何における平面幾何の軽便な表現は複素数を用いることにより得られる．これは，ある点の座標 $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$ を複素数 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}i$ にまとめることで遂行される．我々の場合では，$\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$ が Q の元であるような，複素数 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}i$ が問題となる．このような複素数の領域を Q^* で表すことにする．

さらに，複素数との関連で普通に使われる幾つかの記法を採用することにする．$\mathfrak{c}$ が複素数 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}i$ であるとき，$\mathfrak{J}(\mathfrak{c})$ で $\mathfrak{b}$（$\mathfrak{c}$ の “虚部”）を，$|\mathfrak{c}|$ で $\sqrt{\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2}$（$\mathfrak{c}$ の “絶対値”）を，$\bar{\mathfrak{c}}$ で $\mathfrak{a}-\mathfrak{b}i$（$\mathfrak{c}$ の “共役数”）を表すことにする．$\mathfrak{c}$ は $\mathfrak{b}=0$ のとき実数であるという．また，$\mathfrak{b}=0$ で $\mathfrak{a}$ が正のとき，$\mathfrak{c}$ は正であるという．

---

[58]ついでにいっておくと，$\varphi(a,b,c,d)$ と $\xi(a,b,c,d)$ の 8 つの変数に対応する，8 つの等号の公理，例えば，

$$a=b \to \varphi(a,p,q,r)=\varphi(b,p,q,r)$$

が $\varphi(a,b,c,d)$ の最初の変数に対応するものであるが，これらを付け加えて考えても，これから行う無矛盾性の証明には何の支障もきたさない．証明は，算術的解釈を通じて行うことになるのだが，そこでは，無変数なパラメータを持つ $\varphi(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d})$，$\xi(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d})$ は一意の値に解釈されるからである．詳しくは 94 ページ参照．

無変数な初等論理式の真偽値を決定するにあたって，このような初等論理式は，

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{b},\quad Gr(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}),\quad Zw(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}),\quad \mathfrak{a}\mathfrak{b}\equiv\mathfrak{c}\mathfrak{d}$$

の4つの形のうちの1つであることに注意しよう．ここに，$\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$，$\mathfrak{c}$ は無変数項である．また，無変数項は，α，β，γ のいずれか，あるいは，これらから関数記号 φ，ξ によりつくられたものである．

したがって，無変数な初等論理式の真偽値の決定ためには，まず，全ての無変数項に Q^* の数を対応させ，さらに，

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{b},\quad Gr(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}),\quad Zw(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}),\quad \mathfrak{a}\mathfrak{b}\equiv\mathfrak{c}\mathfrak{d}$$

のそれぞれに算術的命題を対応させ，この命題が $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$，$\mathfrak{c}$，$\mathfrak{d}$ に対応する Q^* の数に対して成り立つかどうかに依存して，該当する初等論理式の真偽値が得られるようにすればよい．

まず，第1段階として，記号 α，β，γ を数 0，1，i に対応させ，関数 φ，ξ の Q^* の元 $\mathfrak{k}$，$\mathfrak{l}$，$\mathfrak{m}$，$\mathfrak{n}$ での値を以下のように定義する．

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathfrak{k},\mathfrak{l},\mathfrak{m},\mathfrak{n}) &= \mathfrak{m}+\tfrac{|\mathfrak{k}-\mathfrak{l}|}{|\mathfrak{m}-\mathfrak{n}|}\cdot(\mathfrak{m}-\mathfrak{n}) && \mathfrak{m}\neq\mathfrak{n}\text{ のとき，}\\
&= \mathfrak{m} && \mathfrak{m}=\mathfrak{n}\text{ のとき，}\\
\xi(\mathfrak{k},\mathfrak{l},\mathfrak{m},\mathfrak{n}) &= \tfrac{\mathfrak{I}(\mathfrak{k}\cdot\bar{\mathfrak{l}})\cdot(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})-\mathfrak{I}(\mathfrak{m}\cdot\bar{\mathfrak{n}})\cdot(\mathfrak{k}-\mathfrak{l})}{\mathfrak{I}((\mathfrak{k}-\mathfrak{l})\cdot(\overline{\mathfrak{m}-\mathfrak{n}}))} && \\
& && (\mathfrak{k}-\mathfrak{l})\cdot(\overline{\mathfrak{m}-\mathfrak{n}})\text{ が実数でないとき，}\\
&= \mathfrak{m} && \mathfrak{k}=\mathfrak{l},\ \mathfrak{m}\neq\mathfrak{n}\text{ のとき，}\\
&= \mathfrak{k} && \text{以上以外の場合.}
\end{aligned}$$

説明: $\varphi(\mathfrak{k},\mathfrak{l},\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ は $\mathfrak{m}\neq\mathfrak{n}$ の場合には，$\mathfrak{n}$ から $\mathfrak{m}$ への線分の延長線上 $\mathfrak{m}$ から $|\mathfrak{k}-\mathfrak{l}|$ の距離にある点となっている．

$(\mathfrak{k}-\mathfrak{l})\cdot(\overline{\mathfrak{m}-\mathfrak{n}})$ が実数でないときには $\mathfrak{k}\neq\mathfrak{l}$，$\mathfrak{m}\neq\mathfrak{n}$ で，$\mathfrak{k}$ から $\mathfrak{l}$ への線分は $\mathfrak{m}$ から $\mathfrak{n}$ への線分と等しくなく平行でもない．このときには，$\xi(\mathfrak{k},\mathfrak{l},\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ は，$\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{l}$ を通る直線と，$\mathfrak{m}$ と $\mathfrak{n}$ を通る直線の交点になっている．

ここで，おのおのの無変数項に対し，まずそこに現れる全ての個体変数を，それらに対応させた複素数で置き換え，そこから出発して，変数に複素数の入った関数記号をそのような値の変数における関数値としての Q^* の元で，順次置き換えてゆくことにより，これらの項に一意に対応する Q^* の値が決まる．

最後に，初等論理式

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{b},\quad Gr(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}),\quad Zw(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}),\quad \mathfrak{a}\mathfrak{b}\equiv\mathfrak{c}\mathfrak{d}$$

に対し，その真偽値の確定のために対応させられる算術的命題を与えよう．$\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ を上の対応で項 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ に割り振られた Q^* の数値であるとしよう．

このとき，$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ の真偽値は，算術的等式 $\mathfrak{k} = \mathfrak{l}$ の真偽値に等しいとする．また，$Gr(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ の真偽値は $(\mathfrak{k} - \mathfrak{l}) \cdot (\overline{\mathfrak{m} - \mathfrak{k}})$ が実数であることの真偽値，$Zw(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ の真偽値は $(\mathfrak{k} - \mathfrak{l}) \cdot (\overline{\mathfrak{m} - \mathfrak{k}})$ が正であることの真偽値，$\mathfrak{ab} \equiv \mathfrak{cd}$ の真偽値は $|\mathfrak{k} - \mathfrak{l}| = |\mathfrak{m} - \mathfrak{n}|$ の真偽値として定める．

初等的な数論的考察により，我々の公理系の公理は，全て，上で確定した真偽値に関して，確証可能であることが確かめられる．つまり，そのそれぞれの自由変数に任意の無変数項を（ただし，おのおのの自由変数については，それの現れる場所の全てに対して同一の項を）代入したものが，(上での付値の意味で）常に真の論理式となる．これで，我々の無矛盾定理による上記の結合公理，順序公理，合同公理，平行線公理からなる幾何学の公理系の無矛盾性が証明された．

ここで用いた証明法は，**非ユークリッド幾何学の無矛盾性**（ただし，ここでも連続性公理は除いて考える）の証明にも同様に応用することができる．

再び平面幾何に限って考えることにすれば，非ユークリッド幾何学の公理系は，すでに考察したユークリッド幾何学の公理系から，平行線公理を次のような公理で置き換えることで得られるものとできる[59]:

（互いに異なる）点 b c の定める直線上にない点 a に対し，a と同一直線上にないような点 p, q で，直線 ap も，直線 aq も bc との共通点を持たないが，p と q の間にある任意の点 d に対し，直線 ad は直線 bc と交わるようなものが存在する．

この公理は，次の論理式で表すことができる:

$$\begin{aligned}\overline{Gr(a,b,c)} \to (Ex)(Ey)\{&\overline{Gr(a,x,y)} \,\&\, \overline{(Ez)}(Gr(a,x,z) \,\&\, Gr(b,c,z))\\ &\& \,\overline{(Ez)}(Gr(a,y,z) \,\&\, Gr(b,c,z)) \,\&\, (u)(Zw(u,x,y)\\ &\to (Ev)(Gr(a,u,v) \,\&\, Gr(b,c,v)))\}.\end{aligned}$$

記号による整約は，ここでは，関数記号 $\xi(a,b,c,d)$ と，もう 1 つの関数記号 $\chi(a,b,c)$ により行われる．2 つの存在記号 (Ex), (Ey) には，それぞれ関数 $\chi(a,b,c)$ および $\chi(a,c,b)$ が対応させられる．これにより，上の公理は，もっ

[59] ヒルベルト著『幾何学基礎論』，補足 III，公理 IV（第 7 版，162 ページ）参照．

と強いものになる．このようにして得られる公理は次のようなものとなる．

$$\begin{aligned}\overline{Gr(a,b,c)} \to \overline{Gr(a,\chi(a,b,c),\chi(a,c,b))}\\ \&\ (\overline{Gr(a,\chi(a,b,c),d)} \vee \overline{Gr(b,c,d)})\\ \&\ (Zw(e,\chi(a,b,c),\chi(a,c,b))\\ \to Gr(a,e,\xi(a,e,b,c))\,\&\,Gr(b,c,\xi(a,e,b,c))).\end{aligned}$$

($\overline{(E\,z)}(Gr(a,y,z)\,\&\,Gr(b,c,z))$ に対応する合接節は必要ないことに注意[60]．)

この公理を平行線公理と取り替えることで，非ユークリッド平面幾何の公理系を得る（ただし連続性公理は除外されている）．ここで，クライン（FELIX KLEIN）による非ユークリッド幾何の射影モデルにより，この公理系の無矛盾性の有限的な証明を得るために，前に行った付値と真偽値の定義に，次のような変更および拡張を施さなければならない．

1. a) 複素数 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}i$ で $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ が Q の元となっているようなものの領域 Q^* の代わりに，そのような数で絶対値が 1 より小さいようなものの領域を用いる．このような数の領域を，Q_1^* と表すことにする．

b) 記号 α，β，γ は，数 0，$\frac{1}{2}$，$\frac{i}{2}$ に対応させる．

c) 前に定義した算術的関数は，Q_1^* からの変数に制限して考える．

d) $\xi(\mathfrak{k},\mathfrak{l},\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ の定義は，(Q_1^* の元 $\mathfrak{k}$，$\mathfrak{l}$，$\mathfrak{m}$，$\mathfrak{n}$ の）4 つの数の組に対して，今までの定義で $\xi(\mathfrak{k},\mathfrak{l},\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ の値の絶対値が ≥ 1 となるときには，$\mathfrak{k}$ を $\xi(\mathfrak{k},\mathfrak{l},\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ の値とするというように変更する．

2. $\chi(\mathfrak{k},\mathfrak{l},\mathfrak{m})$ は，補助関数

$$\begin{aligned}&\tau(\mathfrak{k},\mathfrak{l}) = \frac{i\cdot\mathfrak{J}(\bar{\mathfrak{k}}\cdot\mathfrak{l})\cdot(\mathfrak{k}-\mathfrak{l})}{|\mathfrak{k}-\mathfrak{l}|^2} + \frac{\mathfrak{k}-\mathfrak{l}}{|\mathfrak{k}-\mathfrak{l}|}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\mathfrak{J}(\bar{\mathfrak{k}}\cdot\mathfrak{l})}{|\mathfrak{k}-\mathfrak{l}|}\right)^2} \qquad &\mathfrak{k}\neq\mathfrak{l}\ \text{のとき},\\ &\tau(\mathfrak{k},\mathfrak{l}) = \mathfrak{k} &\mathfrak{k}=\mathfrak{l}\ \text{のとき}\end{aligned}$$

を用いて，等式

$$\chi(\mathfrak{k},\mathfrak{m},\mathfrak{n}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{k}+\tau(\mathfrak{m},\mathfrak{n}))$$

[60] ついでにいうと，ARNOLD SCHMIDT の指摘により，上の論理式では，合接節 $\overline{Gr(a,\chi(a,b,c),\chi(a,c,b))}$ をより簡単な $\chi(a,b,c)\neq\chi(a,c,b)$ で置き換えることができる．つまり，このようにして得られた論理式は，結合公理，順序公理，等号の公理，および合同公理の中の存在公理（3番目の公理），特に，

$$a\neq b \to (E\,x)Zw(x,a,b)$$

により，もとの論理式と演繹的に同値となる．

により定義される．

説明: $\tau(\mathfrak{k},\mathfrak{l})$ は，$\mathfrak{k}\neq\mathfrak{l}$ の場合には，$\mathfrak{l}$ を始点として $\mathfrak{k}$ を通る半直線と零点を中心とする半径 1 の円の交点となり，$\chi(\mathfrak{k},\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ は，$\mathfrak{k}$ から $\tau(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ への線分の中点である．$\tau(\mathfrak{k},\mathfrak{l})$ の値は Q_1^* の元でないが，$\chi(\mathfrak{k},\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ の値は Q_1^* の元となることに注意．

3. 無変数な初等論理式の算術的命題への対応づけに関しては，$\mathfrak{ab}\equiv\mathfrak{cd}$ について，

$$\frac{(\mathfrak{k}-\tau(\mathfrak{l},\mathfrak{k}))\cdot(\mathfrak{l}-\tau(\mathfrak{k},\mathfrak{l}))}{(\mathfrak{k}-\tau(\mathfrak{k},\mathfrak{l}))\cdot(\mathfrak{l}-\tau(\mathfrak{l},\mathfrak{k}))}=\frac{(\mathfrak{m}-\tau(\mathfrak{n},\mathfrak{m}))\cdot(\mathfrak{n}-\tau(\mathfrak{m},\mathfrak{n}))}{(\mathfrak{m}-\tau(\mathfrak{m},\mathfrak{n}))\cdot(\mathfrak{n}-\tau(\mathfrak{n},\mathfrak{m}))}$$

が正しいかどうかによって，$\mathfrak{ab}\equiv\mathfrak{cd}$ の真偽を定義するというように変更する．

以上で確定される真偽値に関して，公理系が確証可能であることの証明は，最後の合同公理を除いては，直接的に，わりあい簡単にできる．これに対して，最後の合同公理については，射影解析幾何でよく知られた幾つかのアイデアを用いる必要がある．しかし，ここでは，これらのアイデアは有限的なやり方で適用できる．考察の対象となるのは，数の領域 Q の元を座標として持つ点に限られるからである．

ここで概略を示した幾何学の公理系の無矛盾性の証明により，一般に，“算術への還元”が無矛盾性証明の役割を完全に果たすことがわかる．これに付け加えて，後は有限の立場による強化が必要になるのみである．つまり，算術への還元は，算術的モデルの扱いで有限的な算術での論証（我々の例では，数の領域 Q においての有限的論証）のみを用いることで達成されるが，それにより得られる有限的算術的モデルは，公理系の公理の解釈を与えるが，形式的証明に対する解釈を与えるわけではないので，このままではまだ無矛盾性の証明にならない．ここで，無矛盾定理がこのギャップを埋めることになる．

もし解析学全体の形式的体系の有限的な無矛盾性証明が得られていたとすれば，上記の議論は必要なくなるはずである．特に，幾何学の公理系の例では，数の領域 Q の非構成的証明法を含む理論の有限的な無矛盾性証明が得られれば十分である．しかしながら，我々は，今までの考察では公理的数論[61]の体系に対してすらそのような証明を与えることができていない．むしろ，この形式的体系の無矛盾性の問題は，我々の無矛盾定理によっては解くことができないの

[61]原書 I，§7，380 ページ，あるいは本書第 2 章参照．

である．このことに関して，どういう情況が生じているのかを以下で検討してみる．

第4章　ε-定理と関連した手法による数論の証明論的考察

4.1　無矛盾定理の数論への応用

原書 I, §7, §8 において，2 つの数論の形式的体系について考察した: 帰納的数論，および関数記号 $\mu_x A(x)$ を加えた体系 (Z) による形式的体系である．帰納的数論は，その基礎となる論理学的な形式的体系としては，自由変数を持つ初等計算のみを持ち，これに，等号の公理，論理式 $0' \neq 0$，帰納法図式と原始帰納の図式を加えたものである．この形式的体系で，すでに初等数論の概念形成，定理，証明が表現できるのであった．他方，この体系では，有限的な解釈がまだ可能である．さらに，この解釈を経ずに，直接にこの体系の無矛盾性を証明することができ，導出可能な論理式で論理式変数を含まないものは，全て，自由変数を数表記で置き換え，関数値を計算したときに，真の論理式となることが示される．

この証拠は，原書 I, §7 で考察したように[1]，帰納法図式と帰納の図式に対してある種の自然な拡張を行った場合にも，問題なく行うことができる．

原書 I, §8 で考察した，別の数論の形式的体系は，等号の公理 (J_1), (J_2) を含む述語計算にペアノの公理[2]を結び付けることによって得られていたが，この際に，和と積の帰納等式を公理としてこれに付け加える必要があった[3]．これにより得られた公理系を "体系 (Z)" と呼び，これの論理学的な形式的体系に，さらに ι-記号を付け加えた．

すでにみたように，ι-記号を用いることにより関数 $\mu_x A(x)$ を以下の特徴づ

---

[1]原書 I, 330 ページ下から 355 ページまで参照．

[2]原書 I, 218–219 ページおよび 264 ページ参照．

[3]これにより，公理 (J_1) は不要になる．

けにより顕現的に定義することができる．

$$(\mu_1) \qquad (Ex)A(x) \to A(\mu_x A(x))$$

$$(\mu_2) \qquad A(a) \to \mu_x A(x) \leq a$$

$$(\mu_3) \qquad (x)\overline{A(x)} \to \mu_x A(x) = 0.$$

この関数は，与えられた性質を持つ最小の数という概念に基づくものだが，すでに示したように，これを用いることにより，全ての算術的な概念形成を表現することができる．また，これを用いることで，和と積の関数があれば，原始帰納の図式は顕現的定義で置き換えることができる．つまり，帰納等式は，その顕現的定義から導出可能な論理式となる[4]．同じことは，多重帰納についてもいえる[5]．

形式的体系の無矛盾性に関しては，ι-規則の除去可能性定理[6]により，ι-規則を付け加えた体系，つまり，体系 (Z) について考察すればよいのであった．

もう 1 つの還元は原書 I, §7 で行われた[7]が，これは，一般的な等号の公理 (J_2) をより特殊な等号の公理で置き換え，さらに帰納法の公理を帰納法図式で置き換えることができるということであった．このようにして得られた公理は，

$$a = a$$
$$a = b \to (a = c \to b = c)$$
$$a' \neq 0$$
$$a = b \sim a' = b'$$
$$a + 0 = a, \quad a + b' = (a + b)'$$
$$a \cdot 0 = 0, \quad a \cdot b' = a \cdot b + a,$$

---

[4]原書 I，421 ページ以降参照．

[5]原書 I，430–431 ページ参照．ここで言及した，ノイマンの証明のアイデアの意味論的な取り扱いは，Rózsa Péter の “Uber die mehrfache Rekursion” (*Math. Ann.* Bd.113, No.4, 1936, §5) で，もっと一般的に，“多重” 帰納法，つまり幾つもの変数で同時に先に進んでゆくような帰納法に関して考察されている．ここでの考察は，純粋に証明論的なものに翻訳することができる．

[6]原書 I，431 ページ下参照．

[7]原書 I，§7，387 ページ参照．

で，これに，帰納法図式

$$\frac{\mathfrak{A}(0) \qquad \mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(a')}{\mathfrak{A}(a)}$$

が付け加わえられる．ここに，$\mathfrak{A}(a)$ で，変数 a はこのパラメータの場所のみに現れるものとする．この体系は“(Z')”と名付けられていたが，述語論理のもとでは，論理式変数を持たない論理式の導出に関して，したがって算術的な導出に関して，また無矛盾性の問題に関して，体系 (Z) と同等になる．

まず，この体系 (Z') に，我々の無矛盾定理[8]が適用できるかどうかを考えてみると，帰納法図式があるため，少なくとも直接には，これを適用することは不可能であることがわかる（帰納法の公理も，それが本来の公理でないため，同様の問題を起こすことになる）．

そこで，とりあえずこの帰納図式を除いて考えてみると，無矛盾定理は適用できるようになっていることが容易にわかる．なぜなら，体系 (Z') の変数を含まない初等論理式は項の間の等式であるが，ここでの項はそれ自身数表記であるか，または数表記から和と積によりつくられるものである．これらの項について，記号 $+$，$\cdot$ のみが用いられている限りは，(和と積の帰納定義を有限的な数論における計算過程の指示と解釈して得られるところの）帰納的な計算法が存在するから，この計算法により，このような項の値としてのある数表記が得られる．したがって，変数を含まない項の間の等式は，これらの項を計算しつくすことで，数表記の間の等式に変形されるが，このような等式 $\mathfrak{s} = \mathfrak{t}$ については，前と同じように，その真偽を数表記 $\mathfrak{s}$，$\mathfrak{t}$ が等しいか否かによって定義することができる．

このような変数を含まない初等論理式の真偽値の確定により，(Z') の公理は，全て確証可能であることが容易にわかる[9]．したがって，(Z') から帰納法図式を取り去ったものに対しては，無矛盾定理により得られた全ての帰結が成立する．特に，束縛変数と論理式変数を含まないような，導出可能な論理式は，全て確証可能である．さらに，公理系 (Z') の初式の全体に (Z') の形式的体系の確証可能な任意の論理式，つまり，この体系の論理式で自由個体変数以外の

---

[8]83 ページを参照．

[9]帰納等式に関しては，原書 I，§7，294 ページでの考察を参照．

変数を含まず，変数にどのような数表記を代入しても，上記の変数を含まない初等論理式の真偽値の意味で，真となるようなものを付け加えても，これらの帰結は成り立つ．そのような論理式を初式として付け加えても，無矛盾定理の前提条件は保たれるからである．

これにより，帰納法図式のうち，少なくともその一部，つまり**束縛変数を持たないような論理式に対する帰納法**についても，我々の結果に含めてよいことがわかる．このためには，原書 I，§7 で帰納的数論の無矛盾性証明で行ったような考察[10]を繰り返せば十分である．この考察から，体系 (Z') で行われた証明で，そこで用いられた帰納法図式

$$\frac{\begin{matrix}\mathfrak{A}(0)\\ \mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(a')\end{matrix}}{\mathfrak{A}(a)}$$

が，束縛変数を持たないような論理式 $\mathfrak{A}(c)$ のみに適用されているなら，そのような図式の終式は，確証可能であることが示せる[11]．したがって，証明の中でのこのような帰納法図式の適用は，ある確証可能な論理式を公理系 (Z') に付加することと同じである．よって，上で述べた注意により，無矛盾定理の主張は，上で考察した体系に束縛変数を持たないような論理式に対する帰納法の公理をさらに付け加えたときにも成り立つことがわかる．

確証可能な初式の付加のみでなく，原始帰納による関数記号の導入の図式を付加によっても，無矛盾定理の前提条件は保たれる: 原始帰納における帰納等式の組は，原始帰納法の内容的に有限的な解釈において[12]，数表記をパラメータとして持つ関数記号からなるような項に対応して，1 つの項が一意に求まるような計算手続きに対応するが，これにより，関数記号の導入により新しく得られた，変数を含まない項に対し，ある数表記が対応させられるような値が確定され，このような値の確定により，帰納等式は確証可能な論理式となる．つまり，帰納等式は自由変数に数表記を代入して，項の値の計算をすることにより，

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}$$

という形の等式に変換されるからである．

---

[10] 原書 I，298–299 ページ参照．

[11] 原書 I，297 ページを参照．

[12] 原書 I，26–27 ページ参照．

同様のことは，多重帰納法の図式についてもいえる．一般に，幾つかの関数記号を，等式の系，あるいは，より一般には，幾つかの公理により無矛盾定理に抵触せずに導入することができる．このときの前提条件は，1. それらの公理が束縛変数を含まない本来の公理であること，および，2. 新しく導入される項に対しての付値の手続きが与えられて，この手続きにより，全ての項に対し，その値として数表記が対応し，この付値に関して新しく導入された公理が確証可能でとなることが示せることである[13]．

このような関数記号の導入に際しては，上に述べた条件とともに，常に，等式

$$a = b \rightarrow \mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}(b)$$

を公理として導入することができる[14]．このような論理式は（変数を含まない項の付値において），いずれの場合にも確証可能になるからである．これを見るために，変数に数表記を代入して，関数の表現をその数値に対応する数表記で置き換えると，a と b が同じ数表記 $\mathfrak{x}$ で置き換えられた場合には，数値 $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ を表す数表記 $\mathfrak{s}$ に対し

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{s} = \mathfrak{s}$$

という論理式が得られ，a と b が異なる数表記 $\mathfrak{x}$ と $\mathfrak{y}$ で置き換えられた場合には，

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y} \rightarrow \mathfrak{s} = \mathfrak{t}$$

とう形の論理式が得られる．これらの論理式の真偽値は，一方は後節が真で，もう一方は前節が偽であるから，どちらも“真”である．

[13]公理による新しい関数記号の導入に関する一般的な注意は，エルブランの論文 “Sur la non-contradiction de l'Arithmétique”, *J. reine u. angew. Math.* Bd.166 (1931), Groupe C にある．この論文で，エルブランが「値の決定の手続きは，帰納的定義の図式でのように，公理の有限的解釈により行われなければならない」といっているところで，その取り扱いは本文で述べた注意に比べて，多少狭義のものになっている．エルブランの後を受けてゲーデルとクリーネにより定式化された**一般帰納関数**の概念とそれに関連する諸概念については，原書 I，§5，356 ページ，および原書 II，補足 II，406 ページ参照．

[14]原書 I，§7 でのように，この論理式は関数記号 $\mathfrak{f}$ で明記された以外のパラメータを持っていてもよい．これらのパラメータには等式 $\mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}(b)$ の両側で，a，b の両方と異なる，同一の自由個体変数が記入されているとする．

同じく原書 I，§7 で考察した帰納法図式の一般化——これにより帰納法図式に課されたた制限の多少の代償が得られることになるわけであるが——も無矛盾定理に含めてよい．すでに考察したように[15]，これは原始帰納法により帰納的数論の普通の帰納法図式に還元できるからである．

これまでに考察したことをまとめてみよう．まず，無矛盾定理は，述語論理と公理系 (Z') によりつくられる体系——帰納法図式はここに含まれていない——にただちに応用できることをみた．また，この体系に，無矛盾定理の応用の可能性を損なうことなく，束縛変数を持たない論理式に制限した帰納法図式，帰納的数論における帰納の図式，およびそれらにより導入される関数に関する等号の公理を付け加えることができることを確かめた．

これにより，一般的な同等性論理式

$$a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b))$$

ではなく，特殊な形の同等性論理式が用いられていることを除けば，帰納的数論を体系に含めることができた．

もう 1 つの拡張は，無矛盾定理自身から帰結できる: 無矛盾定理は考察の対象となっている体系への ε-記号と ε-論理式の付加を許すからである． ε-論理式の導入により， ι-規則（で ι を ε で置き換えたもの）は導出可能となるのであった．したがって，原書 I，§8 の ι-規則の除去可能性定理を用いなくとも，我々の結果に ι-規則をさらに付け加えられることがわかる．このようにして導入された体系は，以下の要素からなる．

1. 述語計算の形式的体系．

2. ε-記号と ε-論理式の形式的体系．

3. 述語記号 $=$，個体記号 0,（関数記号としての）ダッシュ記号，および公理

$$a = a, \qquad a = b \rightarrow (a = c \rightarrow b = c),$$
$$a = b \rightarrow a' = b', \qquad 0' \neq 0.$$

4. 帰納的数論の帰納法図式で，その適用範囲を束縛変数を持たない論理式に限ったもの．

5. 帰納等式，あるいは，それにより導入される新しい項の有限的付値により確証可能となるような，束縛変数を持たない本来の公理からなる図式による，関

[15]原書 I，348–355 ページ参照．

数記号の導入．

6. 新しく導入された関数記号のそれぞれのパラメータに対する同等性論理式

$$a = b \rightarrow \mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}(b)$$

で，導出できないもの．

注意．　体系 (Z') の公理のうち，和と積の帰納等式は，5. に含まれているので，改めて導入する必要はない．公理

$$a' \neq 0, \quad a' = b' \rightarrow a = b$$

については，すでに示したように[16]，原始帰納の図式を用いることにより，$0' \neq 0$ から導出することができる．

このようにして限定された形式的体系において，変数を含まない論理式の真偽値の決定が可能であるが，これは，以下の手続きにより，内側から順に計算してゆくことで遂行される．

a) 述語計算の記号演算の真偽値関数としての解釈．

b) 数表記の間の等式の真偽値の定義: 数表記が同じ形をしているときに“真”と定義し，そうでないときに“偽”と定義する．

c) 関数記号の値の決定の手続きで，5. で述べた図式による関数記号の導入に対応するもの．

この真偽値の確定の手続きに関して，無矛盾定理により，次の命題が成り立つ．

1. 全ての導出可能な変数を含まない論理式は，真の論理式となる．特に，論理式 $0' = 0$ は導出可能ではない．したがって，論理式 $\mathfrak{A}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ の 2 つの論理式が同時に導出可能になることはありえない．

2. 論理式変数と束縛変数を持たないような導出可能な論理式は，全て確証可能である．

3.
$$(E\,\mathfrak{x}_1)\ldots(E\,\mathfrak{x}_n)\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_n)$$

という形をした論理式が導出可能で，$\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_n$ 以外の変数を含まないとき，その導出をもとに，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{z}_1,\ldots,\mathfrak{z}_n)$$

---

[16] 原書 I，§7，301 ページ下から 303 ページ上参照．

が真の論理式になるような数表記 $\mathfrak{z}_1,\ldots,\mathfrak{z}_n$ をみつけることができる．

4.　　$(\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_m)(E\,\mathfrak{y}_1)\ldots(E\,\mathfrak{y}_n)\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_m,\mathfrak{y}_1\ldots,\mathfrak{y}_n)$

という形をした論理式が導出可能で，ここに現れる変数以外に他の変数を含まないとき，全ての数表記の組 $\mathfrak{r}_1,\ldots,\mathfrak{r}_m$ に対し，数表記 $\mathfrak{s}_1,\ldots,\mathfrak{s}_n$ で，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{r}_1,\ldots,\mathfrak{r}_m,\mathfrak{s}_1,\ldots,\mathfrak{s}_n)$$

が真の論理式になるようなものをみつけることができる．

これらの命題 1.–4. は，全て，論理式変数を含まない論理式の導出可能性に関するものであることに注意すると，これらの命題の適用範囲に関して，さらにもう1つの結果が得られる．というのは，体系 (Z) から体系 (Z') に移行するとき，一般的な同等性論理式 (J_2) を特殊な形の同等性論理式で置き換えたのは，一般的な同等性論理式は，論理式変数を持たない論理式の導出に関しては，特殊な同等性論理式と同値であることから，これにより無矛盾性の結果に対して何の制限も課されないという観察に基づくものであった．

この同値性が，我々が上で得た形式的体系にも適用できるかどうかを考えてみると，まず，5. での図式により導入された関数記号については，それに属する特殊な同等性論理式が，6. で導入されていることに気づく．

ところが，さらに，体系の論理の部分に関しては，原書 I，§7 で証明された一般的な同等性論理式の特殊な形の同等性論理式との同値性に関する定理は，述語計算で形式化された理論に対するものであった[17]が，上の形式的体系では，さらに ε-記号とともに ε-論理式が導入されていたことが気になる．このような論理の枠組みでの同様な同値性の定理は，まだ証明されていなかったし，実際には，そのような主張は，一般には正しくないことを示すことができる[18]．しかしながら，原書 I，§8 で示したように，ι-規則を付加したとき，一般的な同等性論理式と特殊な形の同等性論理式の同値性は保たれるのであった[19]．一方，前に述べたように，ι-規則は ε-論理式を用いて導出可能な規則となるのであったから，我々の体系に含まれている．

---

[17] 原書 I，384 ページ参照．

[18] この証明は後で行う．111–112 ページ参照．

[19] 原書 I の補遺を参照．

以上により，命題 1.–4. は，形式的体系の範囲に以下のように変更を加えても成り立っていることがわかる．この形式的体系は次のものからなる:

1. 述語計算;
2. ι-規則;
3. 記号 $=$， 0 とダッシュ記号，および公理

$$a = a, \qquad a = b \to (A(a) \to A(b)),$$
$$0' \neq 0;$$

4. 帰納的数論の帰納法図式（前と同様のもの）;
5. 関数記号の導入のための図式（前と同様のもの）．

ここでの ι-規則の導入は，原書 I, §8 での ι-規則の除去可能性を経ることなく行うことができることをもう一度強調しておく．ここで用いられたのは，一般的な同等性論理式 (J_2) ないし一般的な等号の図式を特殊な形の同等性論理式により置き換えることができるという観察，およびι-規則の ε-論理式への帰着であった．

第1 ε-定理が公理 (J_2) を含めて証明されていないため，一般的な同等性論理式 (J_2) の導入の際に回り道をしなくてはならなかったのは，我々の手法の欠陥とみえるかもしれない．実際に，このために，我々が，上で最後に得た結果では， ϵ-形式を ι-形式に制限しなくてはならなかったのであった．

実際には，第1 ε-定理とその拡張は，公理 (J_2) を含めて証明できるのであるが，次にこれを示す．

4.2　一般的な等号の公理の第1 ε-公理への組み込み

a) 準備的考察，基本タイプ，ε-同等性の論理式．　第1 ε-定理を思い出してみよう[20]．この定理は，述語論理に幾つかの個体記号，関数記号，述語記号，および ε-記号を持ち，初式として束縛変数を含まない幾つかの本来の公理 $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_\mathfrak{k}$，および ε-論理式の付け加えられた形式的体系 F に関するものであった．ε-定理の主張は，形式的体系 F での束縛変数を持たないような論理式 $\mathfrak{E}$ の導出から束縛変数を完全に除去することができるというものであった．

---

[20]63 ページ参照．

さらに，この定理の拡張として，

$$(E\mathfrak{x}_1)\dots(E\mathfrak{x}_\mathfrak{r})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r})$$

という形をした論理式 $\mathfrak{E}$ で，$\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}$ 以外に束縛変数を含まないようなものの体系 F での導出が与えられたとき，これから，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1^{(1)},\dots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(1)})\vee\dots\vee\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{s})},\dots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{s})})$$

という形の論理式 $\mathfrak{E}_1$ のまったく束縛変数を含まないような導出が得られるということを証明した．ここに，$\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{v})},\dots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{v})}$ $(\mathfrak{v}=1,\dots,\mathfrak{s})$ は，自由変数，個体記号，関数記号によって構成された項である．

これらの定理は，考察の対象となっている形式的体系 F が，等号の公理 (J_1)，(J_2):

$$a=a,\qquad a=b\rightarrow(A(a)\rightarrow B(b))$$

を含んでいるときにも成り立つということを証明したい．上の等号の公理のうち 2 番目のものが本来の公理でないことに注意しよう．

この証明のために，原書 I，§7 で，そこで考察した体系での論理式変数を持たない論理式の導出において，公理 (J_2) を幾つかの本来の公理で代用できることを示したときのアイデア[21]を再び用いることにする．

そこでの考察からは，量化詞を含まない論理式 $\mathfrak{A}(a)$ で，そこに現れる初等論理式は，個体変数，個体記号，関数記号，述語記号により構成されているようなものに対し，論理式

$$a=b\rightarrow(\mathfrak{A}(a)\rightarrow\mathfrak{A}(b))$$

は，(J_2) の代わりに用いられる本来の公理と (J_1) により，量化詞を用いずに，つまり自由変数をもつ初等計算の枠内で導出できるということがただちにわかる．

しかしながら，今，考察の対象としている体系 F では，さらに ε-記号が用いられているので，この事実をここでただちに応用することはできない．ε-項が存在する場合に，上の命題にどのような変更を施さなければならないかを調べるために，まず，ε-項の構成に関する準備的な考察を行うことにする．ここの考察では，論理式は，断らなくても，常に**論理式変数を含まない**ものとする．

---

[21] 原書 I，382–384 ページ参照．

ε-項は，一般には他の項をその構成要素として含んでいる．ある ε-項 $\mathfrak{e}$ の構成要素が，項となっており，やはり $\mathfrak{e}$ の構成要素であるような他の項の内側に含まれていないとき，これを $\mathfrak{e}$ の“直接の部分項”と呼ぶことにする．

$\mathfrak{e}$ を，ε-項として，その直接の部分項が——形の違いだけでなく，その出現場所でも区別して——$\mathfrak{l}$ 個あるものとする．このとき，$\mathfrak{e}$ のパラメータ変数 $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_\mathfrak{l}$ を持つ“基本タイプ”[22]とは，$\mathfrak{e}$ の直接の部分項をその出現順序で自由変数 $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_\mathfrak{l}$ で置き換えることにより得られる項のこととする．ε-項 $\mathfrak{e}$ が，部分として項を含まないときには，$\mathfrak{e}$ 自身をその基本タイプとする．

これにより，ε-項の基本タイプは，そのパラメータ変数の命名を除いて，一意に定まり，これに格納された ε-項は存在しないから，常に次数 1 を持つ．一方，これの階数は $\mathfrak{e}$ のそれに等しい．基本タイプの $\mathfrak{e}$ との差異は部分項として現れる項を別の項で置き換えることのみによって引き起こされているからである[23]．

基本タイプは，ε-項のうちで，自由変数以外の項は，その部分として現れず，かつ，その中の自由変数が重複して現れないものとして特徴づけられる．2 つの ε-項が同じ基本タイプを持つのは，片方に部分として現れる項を適当な項で置き換えたときにもう一方が得られる，ちょうどそのときに限る．

ε-項の基本タイプを示す次の例をみてみよう．

$$\varepsilon_x(\varepsilon_y(c+2=\varepsilon_z(y+1<z)) = \varepsilon_y(\varepsilon_z(z+\varepsilon_u(u=z)<z'')<y \,\&\, y<x))$$

という項の基本タイプは，(パラメータ変数 a，b) により，

$$\varepsilon_x(a=\varepsilon_y(b<y \,\&\, y<x))$$

となる．2 つの格納された ε-項

$$\varepsilon_y(c+2=\varepsilon_z(y+1<z)), \qquad \varepsilon_z(z+\varepsilon_u(u=z)<z'')$$

のうち，最初のものの基本タイプは，(パラメータ変数 a，b) により，

$$\varepsilon_y(a=\varepsilon_z(y+b<z))$$

---

[22] ε-項の基本タイプの概念は，ノイマン (J.V. NEUMANN) が “Zur Hilbertschen Beweistheorie”, *Math. Z.* Bd.26 (1927) 28 ページで導入した類似の概念に由来する．

[23] 以下では，パラメータ変数の命名の違いを無視して，ε-項の基本タイプを特定の項として扱うことにする．

となり，２つ目のものの基本タイプは，それ自身である．

次に，与えられた論理式変数を持たない論理式の中の全ての ε-項の基本タイプに対して，顕現的定義により，省略記号を導入する．つまり，パラメータを持たない基本タイプに対しては，個体記号を導入し，パラメータ変数 $\mathfrak{v}_1,\dots,\mathfrak{v}_\mathfrak{k}$ を持つ基本タイプについては，これらのパラメータを持つ関数記号を導入する．これらの導入された記号により，この論理式に現れる ε-項は，自由変数，個体変数，関数記号から構成される表現となる．例えば，上で例として考察した ε-項では，顕現的定義

$$\begin{aligned}\varphi(a,b) &= \varepsilon_x(a=\varepsilon_y(b<y\,\&\,y<x))\\ \psi(a,b) &= \varepsilon_y(a=\varepsilon_z(y+b<z))\\ \alpha &= \varepsilon_z(z+\varepsilon_u(u=z)<z'')\end{aligned}$$

により，

$$\varphi(\psi(c+2,1),\alpha)$$

と表される．この主張の一般的な証明は，ε-項の次数に関する有限的帰納法により容易に得られる．ε-項 $\mathfrak{e}$ から基本タイプの省略記号を用いることで得られる表現において，$\mathfrak{e}$ の構成要素として現れる基本タイプは，ε-記号を含まないような，$\mathfrak{e}$ の部分項に置き換えられていることもただちにみてとれる．

ここで，特に，

$$a=b\rightarrow(\mathfrak{A}(a)\rightarrow\mathfrak{A}(b))$$

という形の，ε-項は含んでいるが論理式変数は含まないような論理式について考えてみよう．そこに現れる ε-項の基本タイプに対し省略記号を導入すると，それらの記号を用いることにより，上の論理式の代わりに，ε-記号は含まないが，その代わりに，前にはなかった幾つかの個体記号あるいは関数記号を含むような論理式

$$a=b\rightarrow(\mathfrak{A}^*(a)\rightarrow\mathfrak{A}^*(b))$$

が得られる．

この論理式は，述語計算により，あるいは論理式 $\mathfrak{A}(a)$，したがって $\mathfrak{A}^*(a)$ が量化詞を含まないなら，すでに初等計算により，

(J_1) $$a=a$$

$$(i) \qquad a = b \to (a = c \to b = c),$$

および

$$a = b \to (\mathfrak{Q}(a) \to \mathfrak{Q}(b))$$
$$a = b \to (\mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}(b))$$

という形をした論理式から導出される．ここに，$\mathfrak{Q}$ は $\mathfrak{A}^*$ に（したがって，$\mathfrak{A}$ でも）現れる述語記号で，$\mathfrak{f}$ は $\mathfrak{A}^*$ に現れる関数記号（つまり，$\mathfrak{A}$ に現れる関数記号，またはある ε-項の基本タイプの省略記号として導入された関数記号 ）である．また，陽に表記しなかった命題記号，または関数記号のパラメータには，互いに異なり，a，b とも異なる自由変数が入っているものとする．

論理式

$$a = b \to (\mathfrak{A}^*(a) \to \mathfrak{A}^*(b))$$

の導出から，

$$a = b \to (\mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(b))$$

の導出を得るには，導入された省略記号を，全て，それを定義している ε-項で置き換えればよい．このとき，

$$a = b \to (\mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}(b))$$

という論理式で，$\mathfrak{f}(\cdot)$ が，ある基本タイプに対して導入された省略記号であるようなものに対し，

$$a = b \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, b)$$

という論理式で，ここに現れる ε-項 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a)$ が基本タイプであるようなものが，それに置き代わることになる．したがって，

$$a = b \to (\mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(b))$$

で，述語計算の記号以外に個体記号，関数記号，述語記号，およびε-記号を含んでいるが論理式変数は含まないようなものは，

1. 論理式 (J_1)，(i)，

2. 上で与えたような，$\mathfrak{A}(a)$ の述語記号と関数記号に対応した特殊な形をした等号の公理，

3. $$a = b \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, b)$$

という形をした論理式で $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a)$ が基本タイプであるようなもの,

から導出可能である．導出は述語計算，ないしは $\mathfrak{A}(a)$ が量化詞を含まない場合には，初等計算において必要なら ε-項の自由個体変数への代入を含めたもので可能である．

注意．　ついでながら，

$$a = b \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, b)$$

という論理式は，

$$a = b \to \varepsilon_x\mathfrak{A}(x, a) = \varepsilon_x\mathfrak{A}(x, b)$$

から，代入（と必要なら書き換え）により得ることができる．最後の論理式は (J_1)，(J_2) から

$$a = b \to \mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}(b)$$

を関数記号 $\mathfrak{f}(\cdot)$ に対して導出したときとまったく同様に導出できる[24]．

---

[24]原書 I，188 ページ参照．この機会に，前に保留にしていた，一般的な等号の公理 (J_2) が論理式変数を持たない論理式の導出に関して特殊な形の等号の公理と同等であるという，述語計算の枠組みの中で形式化された公理系では成り立つ命題が ε-記号と ε-論理式の導入された体系ではもはや成り立たないこと（105 ページ）を確かめておく．

この証明は，先に述べた論理式

$$a = b \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, b)$$

の公理 (J_1)，(J_2) からの導出可能性により以下のようにして示せる:

述語計算に ε-記号と ε-論理式，および帰納法の公理以外の体系 (Z) の記号と公理を付け加えたものを考える．この形式的体系では，論理式

$$a = b \to \varepsilon_x(x \neq a) = \varepsilon_x(x \neq b)$$

は導出可能で，これと公理

$$a + 0 = a$$

を用いると，論理式

$$[\varepsilon] \qquad \varepsilon_x(x \neq 0 + 0) = \varepsilon_x(x \neq 0)$$

が導出できる．

この形式的体系においても，公理 (J_2) を特殊な形の等号の公理で置き換えることができき

このようにして得られた結果を，我々が得ようとしていた[25]等号の公理 (J_1), (J_2) を含んでいる形式的体系 F への ε-定理の拡張の証明に応用しよう．

束縛変数を持たない終式の場合に対する命題の証明でも，存在記号を初めの部分に持つが，それ以外には量化詞も ε-記号も現れないような終式の場合に対するさらに拡張された命題の証明でも，その証明の初めの部分は以前とまった

ると仮定すると，論理式 $[\varepsilon]$ の導出においても (J_2) は特殊な形の等式の公理で置き換えられなくてはならない．この置き換えにより，(Z) の代わりに (Z') が現れるとする．よって，(Z') の公理と ε-論理式から，述語計算により論理式 $[\varepsilon]$ が導出可能でなければならない．

一方，論理式 $[\varepsilon]$ は，論理式

$$\varepsilon_x(x \neq 0) = 0', \qquad \varepsilon_x(x \neq 0+0) = 0''$$

と (Z') の公理を合わせたものに矛盾する．したがって，述語計算に (Z') の記号と公理，ε-記号と ε-論理式，それに 2 つの公理

$$[\varepsilon^*] \qquad \varepsilon_x(x \neq 0) = 0', \qquad \varepsilon_x(x \neq 0+0) = 0''$$

を合わせた形式的体系 “F_1” は矛盾するものでなくてはならない．ところが，これは成り立たない．逆に，我々の ε-記号の除去の手法により，この形式的体系 F_1 は無矛盾であることが示せる．このためには，$[\varepsilon^*]$ の 2 つの論理式を考慮して，手法に以下のような変更を加えれば十分である:

正規化された証明における問題点となる論理式の除去では，問題点となる論理式で，項 $\varepsilon_x(x \neq 0)$, $\varepsilon_x(x \neq 0+0)$ に属すものは除去法の対象からはずす．これらの論理式は，階数は 1 で次数も 1 であるから，他の問題点となる論理式の除去において変形されない．他の問題点となる論理式が全部除去された後で，項 $\varepsilon_x(x \neq 0)$ を $0'$ で置き換え，項 $\varepsilon_x(x \neq 0+0)$ を $0''$ で置き換える．これにより，これらの ε-項に属す問題点となる論理式は

$$\mathfrak{t} \neq 0 \to 0' \neq 0, \qquad \mathfrak{l} \neq 0+0 \to 0'' \neq 0+0$$

という形の論理式に移行し，$[\varepsilon^*]$ の 2 つの論理式は，

$$0' = 0', \qquad 0'' = 0''$$

に移行する．ところが，これらの論理式は (Z') の公理から，初等計算により導出可能である．

このようにして，形式的体系 F_1 での数式論理式 $\mathfrak{E}$ の正規化された証明から，この論理式の (Z') の公理からの初等計算による証明が得られる．しかるに，(Z') の論理式は確証可能であったから，論理式 $\mathfrak{E}$ は真の論理式であることがわかる．

これにより，形式的体系 F_1 は無矛盾であることが示された．したがって，論理式 $[\varepsilon]$ は (Z') の公理から，述語計算と ε-論理式により導出することはできない．

[25] 108 ページ参照．

く同じに行える．まず，一般性を失うことなく終式 $\mathfrak{E}$ は自由変数を持たないとしてよいことを示す．その次に，すべての $(E\mathfrak{v})\mathfrak{F}(\mathfrak{v})$ という形をした表現を $\mathfrak{F}(\varepsilon_v\mathfrak{F}(\mathfrak{v}))$ で置き換え，全ての表現 $(\mathfrak{v})\mathfrak{F}(\mathfrak{v})$ を $\mathfrak{F}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\overline{\mathfrak{F}(\mathfrak{v})})$ で置き換える．ここに，衝突の回避のために必要な変数の書き換えがなされているものとする．これにより，すでにみたように，公理図式 (α)，(β) の適用は代入に移行し，基本論理式 (b) は，ε-論理式に移行する．また，基本論理式 (a) は ε-論理式から代入と対偶規則により導出可能な論理式に移行するが，この導出をもとの導出に付け加える．この量化詞の除去の，終式 $\mathfrak{E}$ に及ぼす影響は，終式が束縛変数を持たないか，あるいは，

$$(E\mathfrak{x}_1)\ldots(E\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}})$$

という形をしているかという，今考察の対象としている 2 つの場合に分けて考える必要がある．最初の場合には，論理式 $\mathfrak{E}$ はまったく変形を受けない．2 番目の場合には，$\mathfrak{E}$ の代わりに，ある ε-項 $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_{\mathfrak{r}}$ に対し

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_{\mathfrak{r}})$$

という形をした論理式が現れる[26]．

次に，証明図の証明糸への分解により，代入の初式への引き戻しを行い，その後で自由変数を除去する[27]．この際に，$\mathfrak{E}$ の導出の初式で，自由変数を含むものは，これへの代入により得られる論理式に置き換えられる．特に，初式として用いられていた公理 (J_2) は

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\rightarrow(\mathfrak{A}(\mathfrak{a})\rightarrow\mathfrak{A}(\mathfrak{b}))$$

という形をした初式で置き換えられる．このとき，この論理式は無変数で，したがって，特に論理式変数を含まない．また，量化詞も含まない．このような形をした論理式は，対応する論理式

$$a=b\rightarrow(\mathfrak{A}(a)\rightarrow\mathfrak{A}(b))$$

への代入により得られるが，この最後の式は，すでにみたように，論理式 (J_1)，特殊な形の等号の公理，それに

$$a=b\rightarrow\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},a)=\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},b)$$

---

[26] 68 ページおよび 71 ページ参照.

[27] 65 ページ参照.

という論理式から導出可能で，この導出は，初等計算に自由個体変数への ε-項への代入の規則を加えたもののもとで可能なのであった．

ここで使われる特殊な形の等号の公理は，形式的体系 F に依存して決まる有限個のものが含まれる，つまり，F の述語記号および関数記号に対する

$$a = b \to (\mathfrak{Q}(a) \to \mathfrak{Q}(b))$$
$$a = b \to \mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}(b)$$

という形をした等号の公理の全体である．(論理式 (i) つまり

$$a = b \to (a = c \to b = c)$$

はこのようなものに含まれることになる.）簡単のために，このような論理式のことを “論理式 $(i_{\mathcal{F}})$ ” と呼ぶことにする．これらの論理式は，全て自由個体変数以外の変数を含まず，公理 (J_1)，(J_2) から束縛変数を用いることなく導出できる．述語記号に対するものは (J_2) から代入によりただちに得られ，関数記号に対するものは，さらに (J_1) を用いることで得られる．

次に，ここで得られた，論理式 $\mathfrak{E}$ の証明の変形されたものに，以下の手続きを施す．全ての初式

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to (\mathfrak{A}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{b}))$$

に対し，対応する論理式

$$a = b \to (\mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(b))$$

の導出の最後に，項 $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$ の変数 a，b への代入を付け加えてできる導出を付け加える．ここに，論理式

$$a = b \to (\mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(b))$$

の導出は，論理式 (J_1)，$(i)_{\mathcal{F}}$，および各基本タイプ $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a)$ に対する

$$a = b \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a) = \mathfrak{B}(\mathfrak{v}, b)$$

という形の論理式からなされる．

この付加された導出たちに対して，再び代入の初式への引き戻しを行い，自由変数の除去を行う．これにより，初式として用いられた，基本タイプ $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a)$ に対する論理式

$$a = b \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a) = \mathfrak{B}(\mathfrak{v}, b)$$

は，

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\ \rightarrow\ \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}^{*}(\mathfrak{v},\mathfrak{a})=\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{b})$$

という形の論理式に変換される．ここに，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}^{(}\mathfrak{v},\mathfrak{a})$，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}^{(}\mathfrak{v},\mathfrak{b})$ は，基本タイプ $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},a)$ を持つ項で，基本タイプ $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},a)$ で a の入っているパラメータの代入場所に項 $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$ が入っているようなものである．

このようにして得られた論理式の連なりは，F から公理 (J_2) を取り除き，その代わりに $(i_{\mathcal{F}})$ の論理式を付け加え，さらに，

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\ \rightarrow\ \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a})=\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{b})$$

という形の論理式を初式として許すことによって得られる形式的体系 F^{*} の枠内での導出とみることができる．ここに，項 $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$ は，同一の基本タイプの同じパラメータ代入場所を埋めているものとする[28]．ただし，ここでの “導出” は，**拡張された意味での**導出である．F^{*} の本当の初式ではなく，それから代入により得られるようなものが，初式として用いられているからである[29]．

さて，F^{*} の公理は全て束縛変数を持たない本来の公理となっているから，第 3 章の第 1 ε-定理の証明の際の状況との唯一の違いは，初式として，

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\ \rightarrow\ \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a})=\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{b})$$

という形の論理式が，第 2 種の問題点となる論理式とでも呼べるものとなっていることである．

このような論理式では，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a})$，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a})$ の表示された項 $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$ がこれらの ε-項の同一の基本タイプの同じパラメータの代入場所を埋めているわけだが——このような初式で，この条件が成り立つことを仮定したのであった——このような論理式のことを “ε-同等性論理式” と呼ぶことにする．さらに，この ε-同等性論理式は，ε-項 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a})$，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{b})$ に “属す” ということにする．この 2 つの ε-項の相等しい階数のことを，上の ε-同等性論理式の階数と呼び，この 2 つの ε-項の共通の基本タイプのことを，上の ε-同等性論理式の基本タイプ

[28] ある ε-項に現れる項 $\mathfrak{g}$ は，この項の基本タイプのパラメータ代入場所を埋めているとは限らないことに注意しよう．$\mathfrak{g}$ は，この ε-項の中の別の項の中に含まれていることもありうるからである．

[29] これに相当する言い回しについては，65 ページ参照．

と呼ぶ（あるいは，それに“属す”基本タイプとか，この基本タイプに上の ε-同等性論理式が属すというようないい方もすることにする）．

注意．　我々の“ε-同等性論理式”の定義では，項 $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$ が異なる形態のものであることを要請しなかった．

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a})$$

という形の論理式は，(J_1) から代入と述語計算により導出することができ，初式として必要ないので，この要請を加えてもかまわない．しかし，幾つかの箇所で，不必要な場合分けをしなくてもすむように，上のような論理式も ε-同等性論理式として認めることにする．特に区別をする必要があるときには，これらのことを，“本質的でない” ε-同等性論理式と呼ぶことにする．

仮に，上で与えられたような証明図から，ε-同等性論理式を問題点となる論理式とともに全て除去できて，第 3 章で行った ε-定理の証明[30]でのように，残っている ε-論理式を変数で置き換えることにより，もともとの導出の終式 $\mathfrak{E}$ が束縛変数を含んでいない場合には，$\mathfrak{E}$ 自身の導出が得られ，$\mathfrak{E}$ が

$$(E\,\mathfrak{x}_1)\ldots(E\,\mathfrak{x}_\mathfrak{r})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r})$$

という形をしていて，$\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}$ 以外に束縛変数を含まなければない場合には，離接論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1^{(1)},\ldots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(1)}) \lor \ldots \lor \mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{s})},\ldots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{s})})$$

の，束縛変数をまったく用いない導出が得られたとすると，その後で，初式のうち新しく付け加えられた公理 $(i_{\mathcal{F}})$ から代入により得られたものに対し，それらの (J_1)，(J_2) からの証明を付け加えれば，上のような終式に対する，束縛変数をまったく用ていないような，形式的体系 F での証明が得られることになる．

したがって，我々の証明のためには，問題となる論理式の除去の手続きを，問題点となる論理式と ε-同等性論理式の両方の除去の手続きにつくり直せればよいことがわかる．

b) 問題点となる論理式と ε-同等性論理式の両方の除去．　ヒルベルトの記号の除去法で ε-同等性論理式も扱うための手法は W. Ackermann が，ヒル

---

[30] 73 ページ以降参照．

ベルトの証明方針の実行を試みた際に得られ，その概要が発表されたが，そこでは，一般的な等号の公理 (J_2) が，初めから公理として用いられていた．

ここで，与えられた証明図に除去の手続きを施す際，利用できる性質は，次のようなものである:

1. 全ての初式は，命題論理の恒真な論理式への代入により得られているか，量化詞を含まない本来の公理であるか，問題点となる論理式であるか，ε-同等性論理式であるかのいずれかである．

2. 量化詞はまったく現れない．また，証明の流れは，論理式の繰り返し，束縛変数の書き換えの他は，推論図式のみから成り立っている．

ここでは，用語を拡張した意味で使って[31]，このような証明図を，“正規化された証明” と呼ぶことにする（意味の拡張は，ここでは ε-同等性公理も初式として許している点にある）．

さらに，この正規化された証明の実行の枠組みとなっている形式的体系 F^* は，公理 (J_1) および $(i_{\mathcal{F}})$ を含んでいるという事実も考慮する必要がある．すでにみたように，これらの公理から，F^* の論理式変数を持たない論理式で，

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to (\mathfrak{A}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{b}))$$

という形をしたものが，ε-同等性論理式の付加されたところで導出できる．より詳しくは，相当する ε-同等性論理式が，代入により，

$$a = b \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, b)$$

という形の論理式で，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, a)$ が $\mathfrak{A}(c)$ に現れる ε-項の1つであるようなものから得られる．したがって，ε-同等性論理式で使われる，それぞれの論理式の階数は $\mathfrak{A}(c)$ に現れる，ある ε-項の階数と等しくなる．

除去の手続きの際には，与えられた正規化された証明と，考察の対象となっている形式的体系の，これらの性質以外にも終式に対して要求される条件を考慮しなくてはならない．つまり，除去の手続きを，今問題としている ε-定理での2つの場合，つまり，終式 $\mathfrak{E}$ が束縛変数を持たない場合と，終式が $(E\,\mathfrak{x}_1)\ldots(E\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\mathfrak{r}})$ という形をしていて，$\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\mathfrak{r}}$ 以外に束縛変数の現れない場合の両方に適用できるように設定しなければならない．後者の論理式は，すでにみたよ

[31] 65 ページ参照．

うに，ε-記号による量化詞の除去によって，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\mathfrak{r})$$

という論理式で，ε-項 $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_\mathfrak{r}$ の外側には ε-記号の現れないようなものに変換される．したがって，我々の課題は，一方において，ε-項を含まない終式 $\mathfrak{E}$ の正規化された証明から，$\mathfrak{E}$ の正規化された証明で問題点となる論理式も ε-同等性論理式も含まないようなものを得ることであり，他方において，終式 $\mathfrak{E}$ がある ε-項 $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_\mathfrak{r}$ に対し $\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\mathfrak{r})$ という形をしていて，これらの項の外側には ε-記号を含まないとき，その正規化された証明から，離接論理式

$$\mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_\mathfrak{s}$$

で，離接の要素 $\mathfrak{E}_v$ $(v = 1,\ldots,\mathfrak{s})$ は，ある項 $\mathfrak{t}_1^{(v)},\ldots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(v)}$ に対し，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1^{(v)}, \ldots, \mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(v)})$$

という形をしているものを終式として持つような，正規化された証明で，問題点となる論理式も ε-同等性論理式も含まないようなものを得ることである．

$\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots \mathfrak{a}_\mathfrak{r})$ で，明記されたパラメータの数 $\mathfrak{r}$ が 0 であることを許すことにすれば，1 番目の課題は，2 番目の課題に含まれていることになる．$\mathfrak{r}$ が 0 である場合には，離接論理式

$$\mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_\mathfrak{s}$$

で，おのおのの要素は $\mathfrak{E}$ と等しくなるわけであるが，離接論理式

$$\mathfrak{E} \vee \ldots \vee \mathfrak{E}$$

からは，命題論理により論理式 $\mathfrak{E}$ を得ることができるからである．これにより，1 番目の課題は別途に考察する必要がなくなる．

一般に，離接論理式 $\mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_\mathfrak{s}$ の $\mathfrak{E}$ との関係は，この離接論理式の全ての要素は，$\mathfrak{E}$ と等しいか，$\mathfrak{E}$ からそこに現れる幾つかの ε-項を他の項（ε-項であっても，そうでなくてもなくてもよい）で置き換えることで得られるようになっていることで特徴づけられる．ある論理式 $\mathfrak{E}$ から，そのような離接論理式 $\mathfrak{E}_\vee \ldots \vee \mathfrak{E}$ への移行を “離接による分裂” と呼んだのであった[32]．すでにみたように[32]，離接による分裂を繰り返して得られるのは，再び離接による分裂であ

[32] 78 ページ参照．

る．つまり，$\mathfrak{E}_1$ が $\mathfrak{E}$ の離接による分裂により得られ，$\mathfrak{E}_2$ が $\mathfrak{E}_1$ の離接による分裂により得られているなら，$\mathfrak{E}_1$ は $\mathfrak{E}$ の離接による分裂により得られたものとなっている．

この事実により，問題点となる論理式と ε-同等性論理式の全ての正規化された証明からの除去は，これらの論理式のうちの任意の 1 つを取り除く部分的な除去に帰着される．このような部分的な除去が，終式を変えないか，終式に離接による分裂を施すかのどちらかであるなら，このような部分的な除去を繰り返しても，全体として，終式に及ぼす変化は離接による分裂以外のものではないからである．

以下では，問題点となる論理式，あるいは，ε-同等性論理式の "除去" というときには，問題としている正規化された証明の終式を，まったく変えないか，あるいは，離接による分裂を施すかのどちらかであるようなものを指すことにする．

前出の問題点となる論理式の除去法[33]にならって，除去のために，前節の "前付け" と，ε-項の置き換えの 2 つの手続きを導入する．

論理式 $\mathfrak{B}$ の前付けとは，まず，与えられた正規化された証明の全ての論理式の初めの部分に $\mathfrak{B}$ を含意の前節として付け加え，さらに，全ての初式 $\mathfrak{P}$ の代わりに現れる $\mathfrak{B} \to \mathfrak{P}$ という論理式について，これが初式として許されている形をしていない場合には，この $\mathfrak{P}$ からの命題論理による導出を付け加え，全ての推論図式の代わりに現れる

$$\frac{\mathfrak{B} \to \mathfrak{S} \qquad \mathfrak{B} \to (\mathfrak{S} \to \mathfrak{T})}{\mathfrak{B} \to \mathfrak{T}}$$

という形の論理式の列を，最後の論理式の前の 2 つの論理式からの（やはり命題論理での）導出で置き換える手続きをいう．

論理式変数も量化詞も含まないような，ある論理式 $\mathfrak{B}$ の前付けにより，論理式 $\mathfrak{E}$ の正規化された証明から，$\mathfrak{B} \to \mathfrak{E}$ の正規化された証明が得られる．

ε-項 $\mathfrak{e}$ の項 $\mathfrak{k}$ による置き換えとは，与えられた正規化された証明の項 $\mathfrak{e}$ が現れる場所の全てについて，これを $\mathfrak{k}$ で置き換える手続きをいう．

[33]66 ページ，73 ページ以降参照．

置き換えの問題点となる論理式への影響については，以前に[34]以下のような結論に達していた: ε-項 $\mathfrak{e}$ への置き換えにより $\mathfrak{e}$ に属さないような問題点となる論理式は，その階数あるいは次数が，$\mathfrak{e}$ のそれより大きいときに限り変化を受ける．さらに，$\mathfrak{e}$ に属さないような問題点となる論理式で，その階数が $\mathfrak{e}$ の階数より大きくないようなものについては，置き換えにより再び問題点となる論理式に移行し，その階数は変わらない．

ε-項 $\mathfrak{e}$ の置き換えが，$\mathfrak{e}$ に属さないような ε-同等性論理式

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$$

に，どのような変化をもたらすかを考えてみよう．

ε-同等性論理式に課された条件により，$\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a})$ での項 $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$ での項 $\mathfrak{b}$ は，この ε-項の，同じ基本タイプを持つ同一のパラメータの代入場所を埋めている．一方，項 $\mathfrak{c}$ が，この論理式に現れるとすれば，それは，この対応する基本タイプの幾つかのパラメータの代入場所か，あるいは，前節 $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ の中である．よって，この ε-同等性論理式が，この置き換えにより変化を受けるとすれば，

$$\mathfrak{a}^* = \mathfrak{b}^* \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}_1(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}^*) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}_1(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}^*)$$

という形になる．ここに，$\mathfrak{B}_1(\mathfrak{v}, \mathfrak{c})$ は $\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{c})$ と同じ基本タイプを持つ．

したがって，ε-項 $\mathfrak{e}$ の 1 つの置き換えにより，$\mathfrak{e}$ に属さないような ε-同等性論理式について，それが変化を受ける場合にも，常に別の ε-同等性論理式に移行し，その基本タイプ，したがって階数は変わらない．

問題点となる論理式と ε-同等性論理式に置き換えによってもたらされる変化に関するこの事実をもとに，すでにみた ε-定理の証明と同様に，問題点となる論理式と ε-同等性論理式の除去を，逐次そこに現れるこれらの論理式の階数の最大値を下げてゆくことで遂行する．実際，正規化された証明から，その中に現れるものの中で一番階数の大きい ε-同等性論理式を除去する手続きが得られれば，十分である．その際に，新しい問題点となる論理式，あるいは ε-同等性論理式が付け加わることがあっても，これらの階数がもっと低いものであるなら問題は起こらない．

---

[34] 74–76 ページ参照．

与えられた正規化された証明で現れる階数のうち，最高のもの $\mathfrak{m}$ が ε-同等性論理式ではなくて，問題点となる論理式のみに現れるときには，前に得た，問題点となる論理式の除去の手続きをそのまま用いることができる．実際，この手続きでは，問題点となる論理式に属す階数 $\mathfrak{m}$ の ε-項の数を逐次減らしてゆくものであった．この手続きが，今考察している場合にもうまく適用できることを確かめるために，そこで，削除の過程がどのようになされていたかを思い出してみよう．

与えられた正規化された証明の問題点となる論理式に属す階数 $\mathfrak{m}$ の ε-項のうち，次数が最高のものをとる．これに属する問題点となる論理式を

$$\begin{gathered}\mathfrak{B}(\mathfrak{k}_1) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}))\\ \vdots \\ \mathfrak{B}(\mathfrak{k}_{\mathfrak{n}}) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}))\end{gathered}$$

とする．次に，$\mathfrak{n}$ 個の“部分証明”をつくる．これらのうち $\mathfrak{r}$ $(\mathfrak{r} = 1, \ldots, \mathfrak{n})$ 番目のものは，与えられた正規化された証明での項 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}B(\mathfrak{v})$ を，項 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{r}}$ で置き換えた後，$\mathfrak{B}(\mathfrak{k}_{\mathfrak{r}})$ を前付けすることで得られるものである．実際，これにより再び正規化された証明が得られる．なぜなら，この ε-項に属さないような問題点となる論理式は，その階数はたかだか $\mathfrak{m}$ でしかないから，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}B(\mathfrak{v})$ の置き換えにより，再び問題点となる論理式に変換され，同様に，ε-同等性論理式も $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v})$ には属さないから，再び ε-同等性論理式に変換されるからである．

今度は，最初の正規化された証明に，論理式

$$\overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{k}_1)} \,\&\, \ldots \,\&\, \overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{k}_{\mathfrak{n}})}$$

を前付けすることにより，$(\mathfrak{n}+1)$ 番目の部分証明を得る．

与えられた正規化された証明が，$\mathfrak{C}$ を終式として持っていたとすると，$\mathfrak{r}$ 番目の部分証明は，

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{k}_{\mathfrak{r}}) \to \mathfrak{C}_{\mathfrak{r}}$$

という終式を持つことになる．ここに，$\mathfrak{C}_{\mathfrak{r}}$ は $\mathfrak{C}$ から，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v})$ の置き換えにより得られるものである．また，$(\mathfrak{n}+1)$ 番目の部分証明は

$$\overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{k}_1)} \,\&\, \ldots \,\&\, \overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{k}_{\mathfrak{n}})} \to \mathfrak{C}$$

を終式として持つことになる．これらの $\mathfrak{n}+1$ 個の終式から，命題論理により，論理式

$$\mathfrak{C}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{C}_\mathfrak{n} \vee \mathfrak{C}$$

を導くことができる．これにより，もとの終式 $\mathfrak{C}$ は離接的分裂を受けることになる（このようにして得られた離接の要素に繰り返しがある場合には，命題計算により，これを取り除くことができる）．おのおのの部分証明で，$\varepsilon_\mathfrak{v}\mathfrak{B}(\mathfrak{v})$ に属す問題点となる論理式は，恒真な論理式から代入によって得られるような論理式で置きかえられている．つまり，これらの問題点となる論理式は，もはや初式として必要なくなっている．ここで行わなければならなかった置き換えにより，新しい問題点となる論理式や ε-同等性論理式が付け加えられる可能性はあるが，その場合でも，これらの階数は全て $\mathfrak{m}$ よりも低いものとなる．なぜなら，$\varepsilon_\mathfrak{v}\mathfrak{B}(\mathfrak{v})$ の置き換えにより，この ε-項に属さない問題点となる論理式，または ε-同等性論理式は階数の高いものに変換されないし，$\varepsilon_\mathfrak{v}\mathfrak{B}(\mathfrak{v})$ に属す問題点となる論理式以外の問題点となる論理式で，階数が $\mathfrak{m}$ となるものがあったとしても，それの次数は $\varepsilon_\mathfrak{v}\mathfrak{B}(\mathfrak{v})$ 以下だから，このようなものは置き換えによってまったく変化を受けないからである．

よって，実際にここで与えられたような方法により，$\varepsilon_\mathfrak{v}\mathfrak{B}(\mathfrak{v})$ に属す問題点となる論理式の除去を行うことができ，これにより，問題点となる論理式の属す ε-項で階数 $\mathfrak{m}$ を持つものの数を1つ減らすことができる．

以上により，正規化された証明で，そこに現れる問題点となる論理式と ε-同等性論理式の最大の階数が $\mathfrak{m}$ であるようなものから，階数 $\mathfrak{m}$ の ε-同等性論理式を除去することが示せればよいことになる．この際に，ε-同等性論理式で階数が $\mathfrak{m}$ より低いもの，または問題点となる論理式で階数が $\mathfrak{m}$ より大きいものが新しく付け足されてもよいものとする．全ての階数 $\mathfrak{m}$ の ε-同等性論理式が除去できれば，階数 $\mathfrak{m}$ を持つ問題点となる論理式は前に述べたやり方で除去できるからである．

さらに，階数 $\mathfrak{m}$ の ε-同等性論理式の除去のためには，正規化された証明が与えられたときに，ε-同等性論理式の属す**基本タイプ**の数を減らすことができれば十分である．このような基本タイプを1つ選ぶ．例えば，正規化された証明の中で最初に現れる階数 $\mathfrak{m}$ の ε-同等性論理式の属する基本タイプをとることにする．このとき，この基本タイプ "$\mathfrak{t}$" に属す初式としての ε-同等性論理式

を除去することができればよい．

このような除去は，問題としている正規化された証明での基本タイプ t を持つ ε-項で，ε-同等性論理式と問題点となる論理式の両方が属すようなものが，1 つも存在しないような場合には簡単に実行することができる．この前提条件が成り立っている場合，基本タイプ $\mathfrak{t}$ を持つ ε-項で，考察している正規化された証明での ε-同等性論理式の属しているようなものを全て変数 a で置き換えれば，階数 $\mathfrak{m}$ を持つ ε-同等性論理式は

$$\mathfrak{G} \rightarrow a = a$$

という形の論理式に変換されるが，このような論理式は，論理式 (J_1) から命題論理によって導出可能である．終式は，それが変形された場合には，もとのものに上の置き換えを施すことで得られる論理式に変換されている．階数 $\mathfrak{m}$ 以下の ε-同等性論理式は，同じ階数の同様な論理式に変換される．階数が $\mathfrak{m}$ で，基本タイプ $\mathfrak{t}$ に属さないような ε-同等性論理式も，階数を保存して，同様の論理式に変換され，問題点となる論理式についても（これらは階数が $\mathfrak{m}$ 以下なのであったが），問題点となる論理式としての形とその階数を保つ．したがって，上のような置き換えにより，すでに全ての基本タイプ $\mathfrak{t}$ を持つ ε-同等性論理式の除去ができたことになる．

上の手続きは，基本タイプ $\mathfrak{t}$ を持つ ε-項で ε-同等性論理式の属すようなものに，1 つ以上の問題点となる論理式も属しているような場合には，適用できない．このような問題点となる論理式は，置き換えにより，その特徴的な形態が崩れてしまうからである．このような場合には，基本タイプ $\mathfrak{t}$ に属す ε-同等性論理式を逐次除去するためのもう少し複雑な手続きが必要になる．このような論理式の除去がどのようになされるかを以下で記述する．

準備として，まず，基本タイプ $\mathfrak{t}$ を持つ本質的でない ε-同等性論理式があれば，それを除去する．このようなものは，公理 (J_1) によりただちに除去することができるのであった．正規化された証明の中に残っている基本タイプ $\mathfrak{t}$ を持つ ε-同等性論理式の全体を “G” で表すことにする．$\mathfrak{l}$ を，G の論理式の属す ε-項のうちで最大の次数を持つものとする．

最初に，考察の対象となっている正規化された証明の中で，項 $\mathfrak{l}$ に属す ε-同等性論理式 “$\mathfrak{F}$” はただ 1 つだけであるようになっていると仮定してみる．この

ときには，この論理式 $\mathfrak{F}$ は，

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{k} = \mathfrak{l} \quad あるいは \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{l} = \mathfrak{k}$$

という形をしていることになる．

2 番目の場合は，1 番目のものに容易に帰着できる．論理式

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{l} = \mathfrak{k}$$

は，ε-同等性論理式であるところの

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{k} = \mathfrak{l}$$

から，((J_1) と (i) から得られる）論理式

$$a = b \rightarrow b = a$$

により導出できる．

論理式

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{k} = \mathfrak{l}$$

は，より詳しくは，

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \rightarrow \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$$

という形をしている．ここに，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a})$，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$ は項 $\mathfrak{k}$，$\mathfrak{l}$ である．

項 $\mathfrak{l}$ の次数に関する仮定により，$\mathfrak{l}$ は，G の論理式に属す他の ε-項の構成要素ではなく，G の論理式の前節に現れる項の構成要素でもない．

まず $\mathfrak{l}$ の $\mathfrak{k}$ による置き換えを行う．この置き換えにより，正規化された証明の中の $\mathfrak{F}$ と異なる ε-同等性論理式の全ては，これにより変化を受けた場合でも，再び同じ基本タイプ，したがって，同じ階数のものに変形されている．同様に，$\mathfrak{l}$ に属さない問題点となる論理式についても，この置き換えによりそれが変化を受けた場合には，その問題点となる論理式としての形状と階数を保持する．このようなものの階数は，$\mathfrak{l}$ の階数 $\mathfrak{m}$ を越えないからである．基本タイプ $\mathfrak{l}$ に属す $\mathfrak{F}$ と異なる ε-同等性論理式は，我々の仮定により，全て $\mathfrak{l}$ に属さないから置き換えにより変化を受けない．論理式 $\mathfrak{F}$ 自身は，

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{k} = \mathfrak{k}$$

という形に変形されるが，これは公理 (J_1) から導出可能である．

したがって，後は残っている $\mathfrak{l}$ に属す問題点となる論理式に考慮すればよい．このようなものは，上の置き換えにより，その特徴的な形態が崩れてしまう．つまり，このような論理式は，項 $\mathfrak{l}$ が $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{b})$ であるとして，

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{c},\mathfrak{b}) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{b}),\mathfrak{b})$$

という形をしていて，置き換えにより，

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{d},\mathfrak{b}) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a}),\mathfrak{b})$$

という形の論理式に変換される[35]が，これは，もはや問題点となる論理式の形態をなしていない．

この困難は論理式 $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$ を前節として前付けすることで回避することができる．これにより，上の $\mathfrak{l}$ に属す問題点となる論理式の置き換える変形で得られたものに対応して，

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{b} \to (\mathfrak{B}(\mathfrak{d},\mathfrak{b}) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a}),\mathfrak{b}))$$

という形の論理式が得られる．このような論理式は，命題計算により，論理式

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}=\mathfrak{b} &\to \mathfrak{b}=\mathfrak{a}\\
\mathfrak{b}=\mathfrak{a} &\to (\mathfrak{B}(\mathfrak{d},\mathfrak{b}) \to \mathfrak{B}(\mathfrak{d},\mathfrak{a}))\\
\mathfrak{B}(\mathfrak{d},\mathfrak{a}) &\to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a}),\mathfrak{a})\\
\mathfrak{a}=\mathfrak{b} &\to (\mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a}),\mathfrak{a}) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{v}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a}),\mathfrak{b}))
\end{aligned}$$

から導出できる．これらの論理式のうち，最初のものは論理式 (J_1)，(i) から導出可能で，3 番目のものは階数 $\mathfrak{m}$ の問題点となる論理式である．2 番目と 4 番目のものは，論理式

$$a=b \to (\mathfrak{B}(r,a) \to \mathfrak{B}(r,b))$$

から置き換えによって得られるが，この論理式は，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}_0(\mathfrak{v},\mathfrak{c})$ を $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{c})$ の基本タイプとして，論理式

$$a=b \to (\mathfrak{B}_0(r,a) \to \mathfrak{B}_0(r,b))$$

---

[35]論理式 $\mathfrak{B}(\mathfrak{c},\mathfrak{b})$ は，項 $\mathfrak{l}$ を含んでいるとすれば，$\mathfrak{l}$ は $\mathfrak{c}$ の中に含まれているか，$\mathfrak{c}$ 自身であるかのどちらかであることに注意しよう．もし別の含まれ方をしていたとすれば，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{b})$ は，項 $\mathfrak{l}$，したがって自分自身より階数あるいは次数が高くなってしまい，矛盾するからである．

から置き換えによって得られるか，この論理式自身である．この最後の論理式の導出は，(J_1)，$(\mathrm{i}_{\mathcal{F}})$ を用い，必要ならば，

$$a = b \to \varepsilon_{\mathfrak{w}}\mathfrak{K}(\mathfrak{w}, a) = \varepsilon_{\mathfrak{w}}\mathfrak{K}(\mathfrak{w}, b)$$

という形の論理式を，幾つか用いることで得られる．ここに，$\varepsilon_{\mathfrak{w}}\mathfrak{K}(\mathfrak{w}, c)$ はそれぞれ $\mathfrak{B}_0(r, c)$ に現れる ε-項である．

$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}_0(\mathfrak{v}, c)$ は基本タイプだから，$\mathfrak{B}_0(r, c)$ に現れる ε-項は，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{c})$ の下位にある ε-表現の束縛変数 $\mathfrak{v}$ を自由変数 $\mathfrak{r}$ で置き換えて得られるようなもののみである．したがって，これらは，全て $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, c)$ より低い階数を持つ．よって，上で用いられた $\varepsilon_{\mathfrak{w}}\mathfrak{K}(\mathfrak{w}, c)$ という形の項は，それぞれ $\mathfrak{m}$ より低い階数を持つことになる．

ここで，論理式

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \to (\mathfrak{B}(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}) \to \mathfrak{B}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}))$$
$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to (\mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}), \mathfrak{a}) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}), \mathfrak{b}))$$

の導出での置き換えを初式に引き戻せば，初式は，そこに現れる ε-項の階数の $\mathfrak{m}$ よりも低くなることがすでに確かめられていたところの

$$a = b \to \varepsilon_{\mathfrak{w}}\mathfrak{K}(\mathfrak{w}, a) = \varepsilon_{\mathfrak{w}}\mathfrak{K}(\mathfrak{w}, b)$$

という形をした ε-同等性論理式，および，やはり階数の $\mathfrak{m}$ より低い ε-同等性論理式

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \to \varepsilon_{\mathfrak{w}}\mathfrak{K}_1(\mathfrak{w}, \mathfrak{b}) = \varepsilon_{\mathfrak{w}}\mathfrak{K}_1(\mathfrak{w}, \mathfrak{a})$$
$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \varepsilon_{\mathfrak{w}}\mathfrak{K}_2(\mathfrak{w}, \mathfrak{a}) = \varepsilon_{\mathfrak{w}}\mathfrak{K}_2(\mathfrak{w}, \mathfrak{b})$$

となる．

したがって，全体として，論理式

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to (\mathfrak{B}(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}), \mathfrak{b}))$$

の導出は，初式として，恒真な論理式と F^* の公理[36]から置き換えにより得られるもの以外では，階数 $\mathfrak{m}$ を持つ，問題点となる論理式

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}), \mathfrak{a}),$$

[36] 115 ページ参照．

また，必要によっては，さらに $\mathfrak{m}$ より低い ε-同等性論理式を用いることで得られることがわかった．

与えられた正規化された証明での $\mathfrak{l}$ に属す問題点となる論理式から，前出の置き換えと $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ の前付けにより得られたおのおのの論理式

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \rightarrow (\mathfrak{B}(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}) \rightarrow \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}), \mathfrak{b}))$$

に対し，上で述べたような導出を付け加えれば，終式

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{C}_1$$

を持つ正規化された証明が得られる．ここに $\mathfrak{C}_1$ は，$\mathfrak{C}$ から置き換えによって得られた論理式である．一方，もとの正規化された証明からは，論理式 $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ を前付けすることにより

$$\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{C}$$

の正規化された証明が得られる．この証明では，論理式 $\mathfrak{F}$ の代わりに

$$\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b} \rightarrow (\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{k} = \mathfrak{l})$$

という論理式が現れるが，これは恒真な論理式

$$\bar{A} \rightarrow (A \rightarrow B)$$

から，代入により得ることができる．両方の “部分証明” の終式

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{C}_1 \quad \text{および，} \quad \mathfrak{a} \neq \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{C}$$

と命題論理により，論理式

$$\mathfrak{C} \vee \mathfrak{C}_1$$

が得られる．さらに $\mathfrak{C}$ と $\mathfrak{C}_1$ が一致する場合には，これから，再び $\mathfrak{C}$ が得られる．

全体として，部分証明の方法により，$\mathfrak{F}$ がもはや初式として用いられていないような正規化された証明が得られた．新しい問題点となる論理式や ε-同等性論理式が付け加わる可能性はあるが，それらの中には新しい階数の値を持つものは現れない．さらに，階数 $\mathfrak{m}$ の ε-同等性論理式については，新しい基本タイプは現れず，基本タイプ $\mathfrak{t}$ に属す新しい論理式も付け加わらない．これにより，基本タイプ $\mathfrak{t}$ に属す ε-同等性論理式の数が 1 つ減らせたことになる．特に，

もし，この数がすでに1だった場合には，階数 $\mathfrak{m}$ を持つ ε-同等性論理式の基本タイプの数が1つ減らせたことになる．終式は，これが変化を受けた場合には，もとの終式の離接による分裂となっているにすぎない．

以上により，全ての階数 $\mathfrak{m}$ の ε-同等性論理式の逐次的な除去ができたようにみえるが，ここでの考察は，項 $\mathfrak{l}$ に属す ε-論理式はただ1つであるという前提条件で特殊化されていたのであった[37]．この制限を取り除くためには，まだ別のアイデアが必要になる．もし，置き換えの施されるべき項 $\mathfrak{l}$ に，複数の ε-同等性論理式が属している場合には，$\mathfrak{l}$ の $\mathfrak{k}$ による置き換えにより，正規化された証明に現れる ε-同等性論理式で $\mathfrak{l}$ に属しているが，$\mathfrak{k}$ には属していないようなもの全ての特徴的な形態が崩れてしまうからである．

ここで現れる可能性について，より詳しく論じ始める前に，まず，一般性を失うことなく，前出の論理式 $\mathfrak{F}$ のみの場合でと同様に，項 $\mathfrak{l}$ に属す G の論理式の全てについて，それらの後節は，

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{l}$$

という形をしている，つまり，$\mathfrak{l}$ が等式の右辺にあると仮定してよい[38]．

また，“選ばれたパラメータ” という概念を導入する．ある ε-同等性論理式

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{s} \rightarrow \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{H}(\mathfrak{v}, \mathfrak{r}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{H}(\mathfrak{v}, \mathfrak{s})$$

において，項 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{H}(\mathfrak{v}, \mathfrak{r})$ と $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{H}(\mathfrak{v}, \mathfrak{s})$ の共通の基本タイプは，一般には複数のパラメータを含んでいる．これらの基本タイプの，あるパラメータへの異なる $\mathfrak{r}$，$\mathfrak{s}$ の代入によって，項 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{H}(\mathfrak{v}, \mathfrak{r})$，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{H}(\mathfrak{v}, \mathfrak{s})$ の違いが生じているとき，これを，対応する基本タイプに関して，“これらの論理式で選ばれたパラメータ” と呼ぶことにする．

$\mathfrak{l}$ に属す ε-同等性論理式 $\mathfrak{G}$ で，$\mathfrak{F}$ と異なるものについては2つの可能性が考えられる．つまり，$\mathfrak{G}$ で選ばれた基本タイプ $\mathfrak{t}$ のパラメータが $\mathfrak{F}$ でのそれと等しい場合と，等しくない場合である．1番目の場合には，再び $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$ で $\mathfrak{l}$ を表すことにすれば，論理式 $\mathfrak{F}$，$\mathfrak{B}$ は，

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \rightarrow \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$$
$$\mathfrak{c} = \mathfrak{b} \rightarrow \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{c}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$$

---

[37] 124 ページ参照．

[38] 124 ページ参照．

という形に表せる．置き換えにより，論理式 $\mathfrak{G}$ は論理式

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{b} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{c}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a})$$

に変形されるが，これは，もはや ε-同等性論理式ではない．2 番目の場合には，2 つの論理式 $\mathfrak{F}$，$\mathfrak{G}$ は，選ばれたパラメータを明記すること，

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{s})$$
$$\mathfrak{r} = \mathfrak{s} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{s})$$

という形に表せる．ここで行われる置き換えは，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{s})$ の $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s})$ によるものとなっており，論理式 $\mathfrak{G}$ は，この置き換えにより，

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{s} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s})$$

に変形されるが，これはやはり ε-同等性論理式ではない．

しかし，容易にわかるように，両方の場合とも，論理式 $\mathfrak{G}$ から置き換えにより得られる論理式は，置き換えによって得られていた前半の部分証明に論理式 $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ を前付けすることで，公理 (J_1)，i と ε-同等性論理式から導出できる論理式となる．

具体的には，1 番目の場合では，$\mathfrak{G}$ は置き換えと $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ の前付けにより，

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to (\mathfrak{c} = \mathfrak{b} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{c}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}))$$

という論理式が得られるが，これは，(J_1) と (i) から得られる

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to (\mathfrak{c} = \mathfrak{b} \to \mathfrak{c} = \mathfrak{a})$$

という論理式により，

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{c}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a})$$

から導出可能である．2 番目の場合では，置き換えと $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ の前付けにより，$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ から得られる論理式は

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to (\mathfrak{r} = \mathfrak{s} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s}))$$

だが，これは，(J_1) と (i) から導出される論理式

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{r}) \ \ &\ \& \, \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{r}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s}) \\ &\to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s})\end{aligned}$$

により，ε-同等性論理式

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \rightarrow \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{r})$$
$$\mathfrak{r} = \mathfrak{s} \rightarrow \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{r}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s})$$

から得られる．

しかしながら，これだけでは，問題が解決されたことにはならない: $\mathfrak{l}$ に属す問題点となる論理式から得られた論理式に対して，その導出を付け加えたときと同様に，$\mathfrak{l}$ を $\mathfrak{k}$ で置き換え，$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ を前付して，前半の部分証明をつくり，これを，$\mathfrak{F}$ とは異なる $\mathfrak{l}$ に属す ε-同等性論理式に対応して現れる論理式に導出として付け加えることで，

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{C}_1$$

という論理式で，$\mathfrak{C}_1$ は $\mathfrak{C}$ から置き換えにより得られているようなものの正規化された証明が得られはする．しかし，ここで用いられる ε-論理式

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \rightarrow \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{c}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a})$$

および

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \rightarrow \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{r})$$
$$\mathfrak{r} = \mathfrak{s} \rightarrow \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{r}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}, \mathfrak{s})$$

は基本タイプ $\mathfrak{t}$ を持っているが，集合 G に属すとは限らない[39]．つまり，除去された論理式 $\mathfrak{F}$ の代わりに基本タイプ $\mathfrak{t}$ の ε-同等性論理式が新しく付け加わる可能性があるため，この $\mathfrak{F}$ を除去するプロセスで，基本タイプ $\mathfrak{t}$ に属す ε-同等性論理式の数が減るとは限らないからである．

そこで，このような，基本タイプ $\mathfrak{t}$ の ε-同等性論理式の除去で，その論理式をうまく選んだときには，最初に予測できるステップ数以内で問題としている基本タイプの ε-同等性論理式が全て除去でき，これにより，そこに現れる階数 $\mathfrak{m}$ の ε-同等性論理式の基本タイプの数を減らせることが示せればよい．

このために，G の中のどれかの論理式が属す ε-項の全体 “$\mathfrak{T}$” を考える．もう少し詳しくいうと，$\mathfrak{T}$ は，与えられた正規化された証明で（そこに現れる本質的でない ε-同等性論理式で基本タイプ $\mathfrak{t}$ を持つものを取り除いて考えるとき）基本タイプ $\mathfrak{t}$ の ε-同等性論理式が属すような ε-項の全体である．

---

[39] 124 ページ参照．

この集合 $\mathfrak{T}$ により，基本タイプ $\mathfrak{T}$ から，そのおのおののパラメータを $\mathfrak{T}$ のある項で同じパラメータを埋めている項で埋めることで得られる ε-項の全体の集合 “$\mathfrak{T}^*$” が決定される．定義により，$\mathfrak{T}$ は $\mathfrak{T}^*$ の部分となる．集合 $\mathfrak{T}^*$ は $\mathfrak{T}$ から具体的に得られる．$\mathfrak{T}^*$ のもとの数の評価も容易に与えることができる．$\mathfrak{n}$ が $\mathfrak{t}$ のパラメータの数で，$\mathfrak{z}$ が $\mathfrak{T}$ の中の少なくとも1つの ε-項のパラメータを埋めているような項——このような項を “$\mathfrak{T}$ の パラメータ項” と呼ぶことにしよう——の数なら，すぐにわかるように，$\mathfrak{T}^*$ の要素は $\mathfrak{z}^{\mathfrak{n}}$ 個以下である．

ここで，$\mathfrak{T}^*$ の項の間の順序を導入する．このために，まず，パラメータ項の間の順序を，2つの ε-項で次数の異なるものでは常に低い次数を持つものが先になり，ε-項でないような項は “次数0の項” と考えられるわけだが，これらが全て ε-項より先にくるように選んでおく．次に，$\mathfrak{t}$ のパラメータの間の順序を選ぶ．そこで，$\mathfrak{T}^*$ の元をまず次数の大きさで順序づけ，さらに辞書式に順序づける．つまり，2つの次数の等しい項では，そこに埋められた項により2つの項が異なるような最初のパラメータのところで，パラメータに埋められた項が先にあるほうの項が，先にあるものとする．

この順序により，置き換えを最初に行う $\mathfrak{T}$ の項 $\mathfrak{l}$ は $\mathfrak{T}^*$ で**一番最後のもの**になるようにする．定義により，$\mathfrak{l}$ は，G の論理式が属すような ε-項の次数の中で最大のものを持つという，ここで必要となる性質を満たしている．$\mathfrak{F}$ を再び任意の $\mathfrak{l}$ に属す G の論理式として，これをまず除去することを試みる．$\mathfrak{F}$ の除去には，$\mathfrak{l}$ の $\mathfrak{k}$ による置き換えを行い，$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ の前付けをする．このようにして，正規化された導出を得るためは，前にみたように，場合によっては，基本タイプ $\mathfrak{t}$ を持つ ε-同等性論理式で，新しい，つまり集合 G に含まれないものを導入する必要がある．このような補助的な論理式の導入により，論理式 $\mathfrak{F}$ の除去を行った後，そこで今度，初式として用いられる基本タイプ $\mathfrak{t}$ の ε-同等性論理式の全体 “G_1” は G の部分集合とはならない．したがって，$\mathfrak{G}_1$ の論理式が属すような ε-項の全体 “$\mathfrak{T}_1$” も必ずしも $\mathfrak{T}$ の部分集合とならない．しかし，容易にわかるように，$\mathfrak{T}$ から $\mathfrak{T}_1$ への移行は，ある意味での簡略化となっている．

これを示すために，前に，項 $\mathfrak{l}$ の置き換えによる ε-同等性論理式 $\mathfrak{G}$ の特徴的な形態の崩れ方の2つの場合に応じて，置き換えと $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ の前付けにより，$\mathfrak{G}$ から得られる論理式を，1つ，または2つの ε-同等性論理式を初式として付

け加えることで得られる2つの種類の導出を対応させたとき[40]と同様の区別を再び行う必要がある。

この2つの場合は，論理式 $\mathfrak{F}$，$\mathfrak{G}$，および補助的に導入された ε-同等性論理式に関して，次のようなものとなっている:

場合 1. $\mathfrak{F}$ の属す項 $\mathfrak{k}$，$\mathfrak{l}$ を $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a})$，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{b})$ で表すとき，$\mathfrak{G}$ は，$\mathfrak{l}$ と $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{c})$ という形の項の両方に属している。このときには，ε-同等性論理式を1つだけ補助として付け加えればよく，この ε-同等性論理式は，項 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{c})$，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a})$ に属している。このときには，$\mathfrak{T}$ には新しい項は1つも付け加わらず，$\mathfrak{l}$ はこの集合から取り除かれる。

場合 2. 項 $\mathfrak{k}$，$\mathfrak{l}$ が $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a},\mathfrak{s})$，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{b},\mathfrak{s})$ となっているとき，$\mathfrak{G}$ は $\mathfrak{l}$ と，項 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{b},\mathfrak{r})$ という形の項の両方に属している。このときには，項 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{b},\mathfrak{r})$，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a},\mathfrak{r})$ に属すものと，項 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a}\mathfrak{r})$，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a},\mathfrak{s})$ に属すものの2つの ε-同等性論理式を付け加える必要がある。したがって，$\mathfrak{T}_1$ は，$\mathfrak{T}$ に 項 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a},\mathfrak{r})$ が付加され，項 $\mathfrak{l}$ が取り除かれたものとなっている。

いずれの場合にも，項 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a},\mathfrak{r})$ は $\mathfrak{T}^*$ に属している。この項では，$\mathfrak{a}$ の占めている場所を除いて，$\mathfrak{t}$ の全てのパラメータは，$\mathfrak{T}$ の項 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{b},\mathfrak{r})$ と同じように埋められているが，項 $\mathfrak{a}$ は，やはり $\mathfrak{T}$ の項であるところの $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a},\mathfrak{s})$ で，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a},\mathfrak{r})$ でと同じパラメータを埋めているからである。

さらに，項 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a},\mathfrak{r})$ は，$\mathfrak{T}^*$ での順序に関して，$\mathfrak{l}$ より前にある。項 $\mathfrak{l}$，つまり $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{b},\mathfrak{s})$ は，選び方から，$\mathfrak{T}^*$ の順序で（$\mathfrak{T}$ に含まれている）項 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a},\mathfrak{s})$，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{b},\mathfrak{r})$ より後にある。したがって，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{b},\mathfrak{s})$ は，少なくとも，これらの2つの項と同じ次数を持ち，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{b},\mathfrak{s})$ の次数が $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a},\mathfrak{s})$ の次数と等しいときには，項 $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{T}$ のパラメータの順序に関して，$\mathfrak{b}$ より前にある。一方，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{b},\mathfrak{s})$ が $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a},\mathfrak{s})$ より高い次数を持つ場合には，$\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{a}$ より高い次数を持つから，再び，項 $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{T}$ のパラメータの順序に関して，$\mathfrak{b}$ より前にある。よって，いずれの場合にも，項 $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{T}$ のパラメータの順序に関して $\mathfrak{b}$ より前にあり，したがって，たかだか $\mathfrak{b}$ と同じ次数を持つ。よって，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a},\mathfrak{r})$ もたかだか $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{b},\mathfrak{r})$ と同じ次数を持ち $\mathfrak{T}^*$ の項の順序で $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{b},\mathfrak{r})$ より前にある。この項は $\mathfrak{l}$ より前にあるのだったから，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{v},\mathfrak{a},\mathfrak{r})$ は $\mathfrak{l}$ より前にあるという上での主張が示せたことになる。

---

[40]129 ページ参照。

上記の 2 つの場合の分析により，場合 1. では，集合 $\mathfrak{T}_1$ の $\mathfrak{T}$ との違いは，$\mathfrak{l}$ が取り除かれていることのみであり，場合 2. では，$\mathfrak{l}$ が取り除かれて，$\mathfrak{T}^*$ の順序に関して $\mathfrak{l}$ より前にある $\mathfrak{T}^*$ の元が付け加わっていることであるということがわかった．したがって，$\mathfrak{F}$ を初式から除去する手続きにより，$\mathfrak{T}^*$ の順序に関して，$\mathfrak{T}$ の元で一番後にあるものの $\mathfrak{T}^*$ での番号が下がる．したがって，初めに $\mathfrak{T}$ に現れる項の最大の番号が $\mathfrak{p}$ であったとすると，多くとも $\mathfrak{p}$ 回の除去手続きの繰り返しにより，基本タイプ $\mathfrak{t}$ に属す ε-同等性論理式は全て除去できることがわかる．

これにより，問題点となる論理式と ε-同等性論理式の両方の除去が可能であることの証明が遂行できた．

c) 第 1 ε-定理と無矛盾定理の拡張.

上で得られた結果から帰結されることを考察しよう．そもそも，この拡張された除去法を考察するに至ったのは，問題点となる論理式と，ε-同等性論理式の両方を正規化された証明から除去できれば，**ε-定理は一般的な等号の公理** (J_2) **と ε-論理式を両方とも含んでいるような形式的体系に対しても成り立つ**ことが示せるという事情によってであった．

つまり，次の定理が成り立つ: F を，命題計算の体系に

1. ε-記号と ε-論理式，
2. 等号と公理 (J_1)，(J_2)，および
3. 幾つかの個体記号，関数記号，述語記号と，これらを含む束縛変数を含まない本来の公理 $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{\mathfrak{k}}$

を付け加えることで得られる形式的体系とする．

この体系で，束縛変数を持たない論理式 $\mathfrak{E}$ が導出可能なら，その導出を変形して，束縛変数の現れないような，つまり自由変数を持つ初等計算で行われているような導出を得ることができる．

さらに，この体系 F で

$$(E\,\mathfrak{x}_1)\ldots(E\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{n}})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\mathfrak{n}})$$

という論理式が導出可能で，$\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\mathfrak{n}}$ がここに現れる束縛変数の全てなら，この論理式の導出から，束縛変数の用いられていないような，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_{\mathfrak{n}})$$

という形の要素を持つ離接論理式の導出が得られる．ただし，$\mathfrak{t}_1,\dots,\mathfrak{t}_n$ は ε-記号を含まないような項である．

またさらに，上の 2 つの場合について，そこで使われる公理 (J_2) を，F に述語記号と関数記号に対して，

$$a = b \to (\mathfrak{O}(a) \to \mathfrak{O}(b))$$
$$a = b \to (\mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}(b))$$

という特殊な形の同等性論理式で置き換えることができる．特に，上の形の同等性論理式は

$$(i) \qquad a = b \to (a = c \to b = c)$$

という論理式を含んでいる．

実際，この付加的な結果は，我々の除去法で，上で述べた置き換えがすでに行われていることから，直接に得ることができる．

さて，F_0 を F から，公理 (J_1) を上のような特殊な形の同等性論理式に置き換えることで得られる形式的体系とすると，上に述べたことから，無変数の論理式が体系 F で導出可能なら，F_0 でも導出可能となる．また，

$$(E\mathfrak{x}_1)\dots(E\mathfrak{x}_n)\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_n)$$

という形の F で導出可能な論理式で $\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_n$ がそこに現れる束縛変数の全てであるようなものは，全て F_0 で導出可能な，$\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1,\dots,\mathfrak{t}_n)$ ($\mathfrak{t}_1,\dots,\mathfrak{t}_n$ は ε-記号を含まない項）という形をした要素からなる離接論理式によって決定される．

一方，形式的体系 F_0 では，第 3 章 で証明した無矛盾定理が適用できるから，形式的体系 F に対する，次のような無矛盾定理を帰結することができる．

無変数の初等論理式 F に対して付値が行えて，それにより，論理式 $\mathfrak{P}_1,\dots,\mathfrak{P}_t$，$(J_1)$，および F の述語記号と関数記号に属す特殊な形の等号の公理が確証可能となるなら，形式的体系 F で導出可能な無変数の論理式は真となり，F で導出可能な自由個体変数以外の変数を含まない論理式は，確証可能となる．また，F で導出可能な，

$$(\mathfrak{x}_1)\dots(\mathfrak{x}_m)(E\mathfrak{y}_1)\dots(E\mathfrak{y}_n)\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_m,\mathfrak{y}_1,\dots,\mathfrak{y}_n)$$

という形の論理式で，$\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_m$，$\mathfrak{y}_1,\dots,\mathfrak{y}_n$ 以外の変数の現れないもの[41]では，

[41]初めに並んでいる全称記号の数 $\mathfrak{m}$ が 0 の場合も含むものとする．

任意の無変数項 $\mathfrak{s}_1,\ldots,\mathfrak{s}_m$ に対し，無変数項 $\mathfrak{t}_1,\ldots,\mathfrak{t}_n$ を選んで，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{s}_1,\ldots,\mathfrak{s}_m,\mathfrak{t}_1,\ldots,\mathfrak{t}_n)$ が真になるようにできる．

この拡張された無矛盾定理は，第 3 章 ですでに考察した初等ユークリッド幾何学，および初等非ユークリッド幾何学の公理系に適用することができる[42]．ここで，特殊な形の等号の公理として (J_2) の代わりに用いられるのは，論理式 (i)，さらに，Gr，Zw ≡ に対する等号の公理だが，これから，他のこれらの述語記号に属す等号の公理は導出可能である．さらに，(記号的整約で導入された) 関数記号 $\varphi(a,b,c,d)$，$\xi(a,b,c,d)$ と，非ユークリッド幾何学では，$\chi(a,b,c)$ に属す同等性論理式である．

これらの特殊な形の等号の公理について，それらが，第 3 章で用いた無変数の初等論理式の付値により確証可能となることは，容易にわかる．したがって，我々の無矛盾性の証明は，これらの 2 つの代数の公理系において，上記の等号の公理の代わりに，公理 (J_1)，(J_2) を用いることによって得られる形式的体系にまで拡張することができる．さらに，ここで本質的なことは，ここで基礎とする論理体系に，ε-記号と ε-公理を付け加えられることである[43]．

この拡張された無矛盾定理で現れる特殊な形の等号の公理の確証可能性に関する条件は，特に，無変数の等式の付値が，等式

$$\mathfrak{s}=\mathfrak{t}$$

で，$\mathfrak{s}$，$\mathfrak{t}$ が無変数項の場合，$\mathfrak{s}$ と $\mathfrak{t}$ の値が等しいか，等しくないかによって，“真” または “偽” の値が与えられているとき——このようなものを善良な等号の付値と 呼ぶことにしよう——には常に満たされる．

したがって，形式的体系 F が，述語計算に ε-形式，等号公理 (J_1)，(J_2)，および束縛変数を持たない幾つかの本来の公理 $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_\mathfrak{k}$ と，そこに現れる個体記号，関数記号，述語記号を付け加えて得られるものであるとき，公理 $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_\mathfrak{k}$ が確証可能になり，無変数項に対する等号の付値が善良な等号の付値となっているような無変数な初等論理式の任意の付値によって，無矛盾性定理の主張は正しいものとなることがわかる．

---

[42] 86 ページ以降参照．

[43] 述語論理のみに対するのであれば，何ら目新しい結果でない．実際，このような定理は，原書 I，§7 での等号の公理 (J_2) の本来の公理による代行によりすでに得られている．

ついでながら，このことをみるためには，体系 F_0 を導入する必要はなく，ε-定理から無矛盾定理を導くためには，形式的体系 F で束縛変数を用いることなく導出できる無変数の論理式が真の論理式であるということが確かめられれば十分である．これは，第 3 章で無矛盾定理を証明したとき[44]のようにして示せるが，そこでは，公理 $\mathfrak{P}_1,\dots,\mathfrak{P}_{\mathfrak{k}}$ が考察している無変数な初等論理式の付値に関して確証可能となことが仮定され，さらに，公理 (J_2) から代入により生じる無変数論理式

$$\mathfrak{s}=\mathfrak{t}\rightarrow(\mathfrak{A}(\mathfrak{s})\rightarrow\mathfrak{A}(\mathfrak{t}))$$

は，善良な等号の付値において，$\mathfrak{s}$ と $\mathfrak{t}$ が異なり，前節が偽な論理式となるか，$\mathfrak{s}$ と $\mathfrak{t}$ の値が一致して，$\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$ と $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ の真偽値も一致し，これにより $\mathfrak{A}(\mathfrak{s})\rightarrow\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ が真になるかのいずれかであるから，全体として，これは真になるという事実が用いられたのであった．

第 4 章，第 1 節で行った考察[45]と同様にして，無矛盾定理の主張は，帰納的数論に量化詞に関する図式，および ε-記号と ε-論理式を付け加えることで得られる形式的体系についてもいうことができる[46]．無変数の初等論理式は，ここでは等式のみであったが，これの付値を，善良な等号の付値と帰納的関数の計算手続きに基づいて決めることができるからである．

4.3　制限の付かない帰納図式を除去法に含めようとするときの困難，帰納法の ε-記号の第 2 論理式による定式化，もともとのヒルベルトの証明方針での着想

一般的な等号の公理 (J_2) を ε-定理と無矛盾定理に取り込めたことにより，前に得ていた結果の不完全な点が是正できた．しかし，それでも，数論の形式的体系に関する我々の結果の大きな欠陥として，帰納法が制限付きの形，つまり，束縛変数を含まない論理式にしか適用できない形でしか含まれていない[47]ため，

---

[44] 80–84 ページ参照.

[45] 100–104 ページ参照.

[46] この形式的体系は，103–105 ページで考察したものと違い，一般的な等号の公理 (J_2) を含んでいることに注意しよう.

[47] 101 ページ参照.

体系 (Z) の無矛盾性は，まだまったく証明されていないわけである．

ε-記号の除去法により，ε-定理が証明でき，これによって無矛盾定理が証明されていたわけであるが，これを変形して，帰納法図式が使われるときにも応用できるようになるのではないかと考えたくなる．しかし，これの可能性について考えてみると，この方向では，何の見通しも得られないことがすぐにわかる．

まず，帰納法図式を含めたとき，除去法のための準備の段階で，代入の引き戻しを行った後で，帰納法図式を壊さないで自由変数の除去を完全に行うことができなくなる．簡単に復習しておくと，代入の引き戻しを，必要な注意事項を守って[48]行ったとき，帰納法図式

$$\frac{\begin{matrix}\mathfrak{A}(0)\\ \mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(a')\end{matrix}}{\mathfrak{A}(\mathfrak{a})}$$

は一般には，変形を受け，

$$\frac{\begin{matrix}\mathfrak{A}(0)\\ \mathfrak{a}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{a}')\end{matrix}}{\mathfrak{A}(\mathfrak{t})}$$

という形になる．ここに，$\mathfrak{t}$ は，ある項で $\mathfrak{a}$ は自由変数で，変化を受けた図式の“選ばれた”変数である．

選ばれた変数を無変数項で置き換えることで，すでに帰納法図式が壊されてしまうのため，論理式変数は除去できても，証明のつじつまを損なわずに，自由個体変数の除去を行うことはできない．

この事態は，それ自身としては，問題点となる論理式の除去に対する障害となるものではない．しかしながら，問題点となる論理式の除去を前と同じ方法で行おうとすると，次の 2 つの困難が生じることがわかる．1 つは，演繹定理の適用に関するものである．除去法の適用において，本来の公理，あるいは ε-論理式への代入によって生じる論理式 $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\mathfrak{r}$ に論理式 $\mathfrak{P}$ を付け加えたときに，そこから，論理式 $\mathfrak{E}$ が命題論理により導出可能なら，論理式 $\mathfrak{P} \to \mathfrak{E}$ が命題論理により論理式 $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_\mathfrak{r}$ から導出可能であるという事実が用られていた．

---

[48]原書 I，267 ページ参照．

この定理を，命題論理に加えて，帰納法図式が導出の手段として用いられている場合に，拡張しようとすると，論理式 $\mathfrak{P}$ は，そこに現れるどの帰納法図式の選ばれた変数も含まないという制限が必要になってくる．

前節 $\mathfrak{P}$ を前付けすることで得られる論理式

$$(\mathfrak{P} \to \mathfrak{A}(\mathfrak{a})) \to (\mathfrak{P} \to \mathfrak{A}(\mathfrak{a}'))$$

が，

$$\mathfrak{P} \to (\mathfrak{A}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{a}'))$$

から導出できることを用いて，帰納法図式

$$\frac{\mathfrak{A}(0) \qquad \mathfrak{A}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{a}')}{\mathfrak{A}(\mathfrak{t})}$$

が，帰納法図式による推論に補完できるのは，$\mathfrak{P}$ が変数 $\mathfrak{a}$ を含まないときに限るからである．これは，この条件下でのみ，論理式の列

$$\frac{\mathfrak{P} \to \mathfrak{A}(0) \qquad (\mathfrak{P} \to \mathfrak{A}(\mathfrak{a})) \to (\mathfrak{P} \to \mathfrak{A}(\mathfrak{a}'))}{\mathfrak{P} \to \mathfrak{A}(\mathfrak{t})}$$

は帰納法図式の形態を持つ[49]からである．

さて，問題点となる論理式の除去において，演繹定理は，除去法の過程で除去されるべき問題点となる論理式に付け加えられる前節 $\mathfrak{B}(\mathfrak{k})$ が，初式 $\mathfrak{P}$ の役割を代行できるために必要なのであった[48]．ところが，問題点となる論理式の前節が，代入の引き戻しの後，どれかの帰納法図式における選ばれた変数となっていないという保証はどこにもない．

---

[49]図式，

$$\frac{\mathfrak{P}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{A}(0) \qquad \mathfrak{P}(\mathfrak{a}) \to (\mathfrak{A}(\mathfrak{a})) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{a}'))}{\mathfrak{P}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{t})}$$

一般に正しい推論の形式化となっていないことは，幾つか例を考えることで容易にわかる．例えば $\mathfrak{A}(c)$ として論理式 $c = 0$ を，$\mathfrak{P}(c)$ として論理式 $c \neq 0$ をとり，$\mathfrak{t}$ として $0'$ をとった場合を考えてみればよい．

もう 1 つの障害は，ε-項の置き換えにより，帰納法図式の形態が壊れてしまう可能性があるということである．例えば，帰納法図式が

$$\frac{\mathfrak{B}(\mathfrak{e},0) \qquad \mathfrak{B}(\mathfrak{e},\mathfrak{a}) \to \mathfrak{B}(\mathfrak{e},\mathfrak{a}')}{\mathfrak{B}(\mathfrak{e},\mathfrak{t})}$$

という形をしていて，$\mathfrak{e}$ はこの図式の選ばれた変数 $\mathfrak{a}$ を含まないとき，これが ($\mathfrak{a}$ が部分として現れるような) 項 $\mathfrak{s}(\mathfrak{a})$ で置き換えられたとすると，それにより得られる証明図

$$\frac{\mathfrak{B}(\mathfrak{s}(\mathfrak{a}),0) \qquad \mathfrak{B}(\mathfrak{s}(\mathfrak{a}),\mathfrak{a}) \to \mathfrak{B}(\mathfrak{s}(\mathfrak{a}),\mathfrak{a}')}{\mathfrak{B}(\mathfrak{s}(\mathfrak{a}),\mathfrak{t})}$$

はもはや帰納法図式の形をしていない．帰納法図式

$$\frac{\mathfrak{A}(0) \qquad \mathfrak{A}(\mathfrak{a})) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{a}')}{\mathfrak{A}(\mathfrak{t})}$$

では，$\mathfrak{a}$ は，明記された場所のみに現れることが仮定されていたからである[50]．

この困難は，帰納法図式の形態に起因したわけであるから，ε-定理と無矛盾定理の数論の形式的体系への拡張のために，帰納法図式の代わりに，帰納法の公理，あるいはその他の完全帰納法の原理の形式化を用いることが考えられる．帰納法の公理は，(量化詞の除去法で行ったように) そこで現れる全称記号を ε-記号を使って除去すると，かなり扱いにくい論理式になってしまう．しかし，考察している数論の形式的体系が，等号の公理 (J_1) を含んでいれば，これの代わりに，もっと単純な論理式

$$A(a) \to \varepsilon_x A(x) \neq a'$$

を，公理

$$a \neq 0 \to (\delta(a))' = a$$

[50]原書 I，265 ページ参照．

とともに用いることで十分である．この最後の論理式は，帰納法図式と帰納的定義

$$\delta(0) = 0, \qquad \delta(a') = a$$

および，論理式

$$a = b \rightarrow a' = b'$$

から導出可能であるが，これは，公理

$$a \neq 0 \rightarrow (E\,x)(x' = a)$$

の整約された形とみることができる．一般化された ε-定理，あるいは無矛盾定理を証明するにあたって，この論理式は何の支障も起こさない．この論理式は，自由個体変数をただ 1 つの変数として含むが，δ の帰納的定義での意味の解釈による無変数項 $\delta(\mathfrak{a})$ の付値により，確証可能な論理式となるからである．

上の 2 つの論理式

$$A(a) \rightarrow \varepsilon_x A(x) \neq a'$$
$$a \neq 0 \rightarrow (\delta(a))' = a$$

を公理として導入することにより，帰納法図式が導出可能な規則となること，あるいは，帰納法の公理が導出可能な論理式となる[51]ことは，次のようにして示せる．

示すべきことは，2 つの論理式

$$\mathfrak{A}(0), \qquad \mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(a')$$

から，

$$A(a) \rightarrow \varepsilon_x A(x) \neq a'$$
$$a \neq 0 \rightarrow (\delta(a))' = a$$

を用いて，$\mathfrak{A}(a)$ が導出できることである．導出で使えるのは，上の 4 つの論理式以外では，命題計算，ε-論理式と等号の公理 (J_2) であるが，等号の公理からは，論理式

$$a = b \rightarrow (A(b) \rightarrow A(a))$$
$$a = b \rightarrow b = a$$

[51] 帰納法の公理の帰納法図式からの導出については，原書 I，266 ページ参照．

が導出可能である[52].

一般性を失うことなく，$\mathfrak{A}(a)$ は変数 x を含まないとしてよい．そうでない場合には，その命題論理式に現れる変数 x を書き換えによって除去し，後で，再び終式に導入することができるからである．

論理式

$$a \neq 0 \to (\delta(a))' = a$$

は，

$$a = 0 \vee (\delta(a))' = a$$

と変形できるが，これへの代入により，

$$\varepsilon_x \overline{\mathfrak{A}(x)} = 0 \vee (\delta(\varepsilon_x \overline{\mathfrak{A}(x)}))' = \varepsilon_x \overline{\mathfrak{A}(x)} \tag{1}$$

が得られる．

$\mathfrak{A}(0)$ と $a = b \to (A(b) \to A(a))$ からは，

$$\varepsilon_x \overline{\mathfrak{A}(x)} = 0 \to \mathfrak{A}(\varepsilon_x \overline{\mathfrak{A}(x)}) \tag{2}$$

が得られる．

$$A(a) \to \varepsilon_x A(x) \neq a'$$

からは，まず変数 a への代入により

$$A(\delta(\varepsilon_x \overline{\mathfrak{A}(x)})) \to \varepsilon_x A(x) \neq (\delta(\varepsilon_x \overline{\mathfrak{A}(x)}))'$$

が得られる．この論理式は，$\delta(\varepsilon_x \overline{\mathfrak{A}(x)})$ を "$\mathfrak{d}$" と略記することにして，

$$A(\mathfrak{d}) \to \varepsilon_x A(x) \neq \mathfrak{d}'$$

と表せるが，この論理式変数に代入を行って，

$$\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{d})} \to \varepsilon_x \overline{\mathfrak{A}(x)} \neq \mathfrak{d}'$$

を得る．これから，対偶規則と論理式

$$a = b \to b = a$$

を用いて，

---

[52]原書 I，168 ページ上，あるいは 25 ページ参照．

(3) $$\mathfrak{d}' = \varepsilon_x\overline{\mathfrak{A}(x)} \rightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{d})$$

を得る．一方，論理式 $\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(a')$ からは，代入により

(4) $$\mathfrak{A}(\mathfrak{d}) \rightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{d}')$$

が得られ，(J_2) により，

(5) $$\mathfrak{d}' = \varepsilon_x\overline{\mathfrak{A}(x)} \rightarrow (\mathfrak{A}(\mathfrak{d}') \rightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon_x\overline{\mathfrak{A}(x)}))$$

が得られる．論理式 (3)，(4)，(5) からは，命題計算により，

$$\mathfrak{d}' = \varepsilon_x\overline{\mathfrak{A}(x)} \rightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon_x\overline{\mathfrak{A}(x)}),$$

つまり，

(6) $$(\delta(\varepsilon_x\overline{\mathfrak{A}(x)}))' = \varepsilon_x\overline{\mathfrak{A}(x)} \rightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon_x\overline{\mathfrak{A}(x)})$$

が得られる．ところが，(1)，(2)，(6) からは，命題計算により，

$$\mathfrak{A}(\varepsilon_x\overline{\mathfrak{A}(x)})$$

が得られるが，この論理式から ε-論理式と命題計算により，求めていた論理式 $\mathfrak{A}(a)$ が得られる．

このようにして，論理式

$$A(a) \rightarrow \varepsilon_x A(x) \neq a'$$

は，確かに，ε-論理式と公理 $a \neq 0 \rightarrow \delta(a)' = a$ とともに用いることで，完全帰納法の原理の形式化を与えることがわかる．論理式 $A(a) \rightarrow \varepsilon_x A(x) \neq a'$ は，ε-論理式と併せたときには，内容的には「少なくとも，1 つの数に対して成立するような数に関する性質 $\mathfrak{P}$ に対し，$\mathfrak{P}$ を満たす数で，この数の前の数が存在するなら（つまり，この数が 0 と異なるなら），それに対しては $\mathfrak{P}$ の成立しないようなものが存在する」という原理を表している．

この原理は，ただちにわかるように，最小数の原理からの帰結である．この内容的にはより強力な原理に比べて，上の原理は大小関係を用いることなく記述できるという意味で構造的に多少簡単なものになっているという長所がある[53]

[53]形式的には，この 2 つの原理の関係は，最小数の原理が μ-関数により，論理式

(μ_1) $$(E\,x)A(x) \rightarrow A(\mu_x A(x))$$

この完全帰納法の原理の新しい形式化により，完全帰納法を含めた体系での束縛変数の除去は，前とまったく同様にできるようになる．量化詞の除去と，代入の初式への引き戻しの後で，自由変数の除去を行うことができて，それにより，再び証明の流れは推論図式（と，繰り返しおよび置き換え）のみからできているような“正規化された証明”を得ることができる．今までに考察してきたような正規化された証明[54]との違いは，ε-記号の現れる初式として，問題点となる論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))$$

と，ε-同等性論理式[55]以外に，論理式

$$A(a) \to \varepsilon_x A(x) \neq a'$$

への代入によって生じる論理式が加わるという点である[56]．つまり，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}) \to \varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \neq \mathfrak{k}'$$

という形をした初式を“第 2 種の問題点となる論理式”として 考慮しなくてはならなくなる．

このような，以前のケースでの ε-記号の除去の証明の初めの部分との形式的な類似性にもかかわらず，我々の除去法を，今考えている場合に拡張できる見込

(μ_2)　　$$A(a) \to \mu_x A(x) \leq a$$

により形式化されているような体系をみることで，より明らかになる（原書 I，396 ページ参照）．この 2 つの論理式のうち 1 番目のものは

$$A(a) \to A(\mu_x A(x))$$

と演繹的に同値となる．2 番目のものからは，

$$a' \neq a, \qquad \overline{a' < a}$$

により，論理式

$$A(a) \to \mu_x A(x) \neq a'$$

が得られる．

[54]65 ページ，117 ページ参照．

[55]116 ページ参照．

[56]ここでは，前と同じように，論理式変数への代入は変数 x の書き換えを伴って行われてよいことにする（これについては，57 ページ参照）．

みはまったくない．もし，このような拡張が可能であるとすれば，それにより，束縛変数を含まない論理式の導出から，束縛変数だけでなく，帰納法図式の使用も除去するような手続きが得られたことになってしまう．帰納法図式の使用は，すでに示した[57]ように，ε-論理式，論理式 $a \neq 0 \rightarrow \varepsilon_x A(x) \neq a'$，等号の公理 (J_2)，および論理式 $a \neq 0 \rightarrow \delta(a)' = a$ で置き換えられるのだったが，もし，これからさらに，束縛変数，したがって ε-記号を含むような初式を全て除去できるとすれば，これにより，帰納法図式の使用を全て (J_2) と $a \neq 0 \rightarrow \delta(a)' = a$ という論理式に帰着できてしまったことになる．しかし，実際には，これは不可能である[58]．

---

[57] 141 ページ以降参照．

[58] これは，簡単な例でみることができる．ペアノの 2 つの公理 $a' \neq 0$，$a' = b' \rightarrow a = b$ を考えよう．初等計算と帰納法図式により，これから，論理式 $a' \neq a$ が導出できる．論理式 (J_2) と $a \neq 0 \rightarrow \delta(a)' = a$ を用いることで，この導出から，帰納法図式が除去できると仮定すると，論理式 $a' \neq a$ の，2 つのペアノの公理と (J_2) それに $a \neq 0 \rightarrow \delta(a)' = a$ からの自由変数を持つ初等計算のみを用いている導出が得られたことになる．さらに，この導出での等号の公理 (J_2) を，特殊な形の等号の公理で代用することができる．つまり，ここでは述語記号としては等号しか現れず，関数記号としてはダッシュ記号と，記号 δ のみしか用いられていないので，(J_2) は，論理式 (J_1)，i，および $a = b \rightarrow a' = b'$，$a = b \rightarrow \delta(a) = \delta(b)$ で代用すれば十分である．

よって，論理式 $a' \neq a$ は公理系

$$
\begin{array}{lll}
a = a, & a = b \rightarrow (a = c \rightarrow b = c), & a = b \sim a' = b' \\
a' \neq 0, & a = b \rightarrow \delta(a) = \delta(b), & a \neq 0 \rightarrow (\delta(a))' = a
\end{array}
$$

から自由変数を持つ初等計算により導出できなくてはならない．したがって，この公理系に個体記号 ω と，公理

$$a = \omega \rightarrow a' = \omega$$

を加えたものは，この公理と，論理式 $\omega = \omega$ により $\omega = \omega'$ が得られることから，これらの公理から $0' = 0$ も導出されるという意味で，矛盾するものとなる．ところが，これは正しくないことが，次のような無変数の等式への付値を考えることでわかる: 無変数の等式 $\mathfrak{s} = \mathfrak{t}$ は，$\mathfrak{s}$ と $\mathfrak{t}$ の両方が記号 ω を含んでいるとき，あるいは，$\mathfrak{s}$ も $\mathfrak{t}$ も記号 ω を含まず，記号列として等しいか，そこに現れる δ の関数値の（普通の方法での）計算により同じ数表記が得られるとき，“真” であると定義する．これ以外の全ての場合に，等式 $\mathfrak{s} = \mathfrak{t}$ は “偽” であるとする．この付値により，上に列挙した公理と，それに付け加えた公理 $a = \omega \rightarrow a' = \omega$ は全て確証可能となる．したがって，この公理系から初等計算により導出可能な無変数な論理式は，真の論理式とならなければならないが，$0' = 0$ は偽の論理式である．

このように，第1 ε-定理の数論的体系への拡張は不可能であるように思われので，数論的体系の無矛盾性証明は，ε-定理を用いずに行うことを試みなければならない．

まず，今までの考察で得られている手法が，ここでどのくらい応用できるかを考えてみよう．問題としている形式的体系は，述語論理に ε-記号と ε-論理式，および公理系 (Z) を加えたものであるが，ここでは，個体記号としては 0 のみ，述語記号としては等号のみ，また，関数記号としてはダッシュ記号および和と積の記号のみが現れる．帰納法の公理は，上でみたように，論理式

$$a \neq 0 \rightarrow (\delta(a))' = a$$
$$A(a) \rightarrow \varepsilon_x A(x) \neq a'$$

で置き換えられるのだったが，これらを帰納法の公理の代わりに初式として加える．

無矛盾性の証明には，無変数の導出可能な全ての論理式について，それが，善良な等号の付値，無変数の和と積による表現の帰納的な計算方法，命題計算の演算の真偽値関数としての解釈によって得られる“自然な”付値において，真の論理式となることが示せれば十分である．これを示すには，無変数の論理式の導出が問題となる．

そのような導出には，量化詞の除去，代入の初式への引き戻し，自由変数の除去の手続きを適用することができる．さらに，公理 (J_2) の使用を特殊な形の等号の公理の使用と ε-同等性論理式の初式としての使用で置き換えられる．ここで用いられる特殊な形の等号の公理は，我々の今の体系の含んでいる述語記号と関数記号に対応するものである[59]．

全体として，次のような性質を持つ論理式の列からなる“正規化された証明”が得られたことになる:

---

[59] すでにみたように，これらの同等性論理式のうち，和と積の記号に対するものは，帰納法図式により，和と積の帰納等式と (J_1)，(i)，および $a = b \rightarrow a' = b'$ から導出可能である（原書 I，387 ページ参照）．しかしながら，これにより，これらの同等性論理式が初式として必要なくなるわけではない．帰納法図式を，論理式

$$a \neq 0 \rightarrow (\delta(a))' = a, \qquad A(a) \rightarrow \varepsilon_x A(x) \neq a'$$

で置き換えた後では，帰納法図式は，間接的な導出された規則でしかないが，これの導出には，そのたびに等号の公理 (J_2) が必要となるからである．

1. 全ての論理式は，記号 $=$，0，$'$，$+$，$\cdot$，δ，命題論理の記号，ε-記号，およびそれに属す束縛変数から成り立っている．

2. 全ての論理式は，初式であるか，前に出てきた論理式の（場合によっては1つ以上の変数の書き換えを伴った）繰り返しであるか，推論図式の終式かのいずれかである．

3. 全ての初式は，命題論理の恒真な論理式，または，形式的体系の本来の公理の1つ，または，2つの論理式

$$A(a) \to A(\varepsilon_x A(x)), \qquad A(a) \to \varepsilon_x A(x) \neq a'$$

のうちの1つへの，代入により得られるものか，あるいは，ε-同等性論理式である．

上の2つの論理式から代入によって得られる

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})),$$

または

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}) \to \varepsilon_{\mathfrak{x}} \mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \neq \mathfrak{k}'$$

という形の論理式を，それぞれ ε-項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ に“属す”“第1種”および“第2種”の“問題点となる論理式”と呼ぶことにする．

この形式的体系の本来の公理（特殊な形の等号の公理を含む）と，命題論理の恒真な論理式は，「それから代入によって得られた任意の無変数な論理式は，自然な付値において，真の論理式となる」という性質をもつ．このことから，前に行った考察により，正規化された証明の終式は，そこに ε-記号が現れないなら，自然な付値においての真な論理式となる．

除去法で行いたいのは，無変数の論理式の正規化された証明を変形して，同じ論理式の ε-記号を含まない証明を得ることである．しかし，我々の論証では，ε-記号の除去により得られる証明が，正規化されている必要はない．全ての初式が（自然な付値により）真となるような論理式に変形されるような，そこに現れる ε-項の**数表記による置き換え**が得られれば十分である．なぜなら，推論図式は置き換えにより壊されないので，これにより，その，全ての論理式，したがって，その終式の真となるような論理式の列が得られることになるからである．

本来の公理の1つ，あるいは恒真な命題論理の論理式から代入によって得られるような全ての初式は，ε-項を任意の数表記で置き換えることにより真の論理式になるということに注意すると，正規化された証明に現れるε-項に対し，数表記による置き換えで，それによって，全ての第1種と第2種の問題点となる論理式，およびε-同等性論理式が真の論理式に変換されるようなものがみつかればよいことがわかる．

ヒルベルトが，ε-記号の除去の問題に最初に取り組んだのは，ε-定理に至る除去法を発見するよりずっと前のことであったが，それは，上のような観点からで[60]，そこでは，手始めに，正規化された証明の簡単な場合の考察が行われて，その場合での正規化された証明に現れるε-項を上に述べたような性質を満たす数表記で置き換える方法が与えられた．

この方法は，ε-項の除去に対する，1つの証明方針を与えるもので，当初はこの方法により，数論の形式的体系のみでなく，解析学の形式的体系の無矛盾性さえも，根本的には何の困難もなく証明できるであろうと考えられていた．ところが，この目標に向かって研究が進むにつれて，予期しなかった容易ならぬ困難が明らかになってきた．このヒルベルトの証明方針の実行による最良の結果である，アッカーマンとフォン・ノイマンにより得られた定理ですら，ε-定理の単純な応用によって得られる無矛盾定理の内容を本質的に超えるものではない．

しかしなお，この証明方針は詳しく考察してみるだけの価値がある．これにより得られた手法は多くの応用において重要であるし，この証明方針によってさらに研究を進めることができる可能性も残されていないとは限らないからである．

4.4　ε-記号の除去に対するヒルベルトの本来の証明方針とその展開[61]

a) 簡単な場合．　ヒルベルトの置き換え手続きを説明するために，まず，正

[60]原書 I，348ページ下から349ページ参照．358ページで与えられた一般化された帰納法図式は，普通の制限付きでない帰納法図式の2回の適用に帰着できる．

[61]ヒルベルトの証明方針の基本的な考えのみを知りたいと思う読者は，この節のa)を読んで，直接，e)または，第5章に進むとよい．

規化された証明がまったく簡単な形をしている場合を考えることにする．つまり，第1種の問題点となる論理式は全て同一の ε-項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ に属し，他の ε-項はまったく現れず，第2種の問題点となる論理式と ε-同等性論理式もまったく現れないと仮定する．

項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ を数表記で置き換えて，その置き換えにより，これらの問題点となる論理式が真の論理式となるようにできればよいわけである．問題点となる論理式は，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))$$

という形をしている．ここに，論理式 $\mathfrak{A}(c)$ は項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ を含まない．そうでなければ，この ε-項は自分自身の中に格納されていることになってしまうからである．これに対し，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ は $\mathfrak{k}$ の中に現れる可能性がある．

まず，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ を数表記 0 で置き換えることを試みる．この置き換えにより，問題点となる論理式は無変数の論理式に変換される．そのような論理式の真偽値は，そこに現れる $+$，$\cdot$，δ により構成された関数の表現を計算して，善良な等号の付値を行い，命題計算の演算を真偽値関数と解釈することで確定できる．

もし，これにより，おのおのの問題点となる論理式の値が“真”となれば，これで問題は解決したことになる．そうでなければ，“偽”の値を与えられた問題点となる論理式のうちで最初のものをとる．$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ の 0 による置き換えにより，これは，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{l}) \to \mathfrak{A}(0)$$

という形になっている．ここに $\mathfrak{l}$ は無変数項である．ここで $\mathfrak{z}$ を，項 $\mathfrak{l}$ を計算することで得られる（あるいは，$\mathfrak{l}$ 自身としての）数表記とする．無変数の論理式での付値の仕方により，$\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ は $\mathfrak{A}(\mathfrak{l})$ と同じ値をとる．したがって，論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{A}(0)$$

の値も“偽”である．したがって $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ は真の論理式で，$\mathfrak{A}(0)$ は偽の論理式となっていることがわかる．

ここでもう1度，今度は $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ を数表記 $\mathfrak{z}$ で置き換えると，問題点となる論理式のおのおのは

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{t}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{z})$$

という形の無変数な論理式に変換される．ところが，$\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ は値が“真”となっていたから，上の形の論理式も“真”となる．つまり，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ の $\mathfrak{z}$ による置き換えによって，求めていた結果が得られたことになる．

このようにして，2回以内のステップで問題点となる論理式を真の論理式に変換するような置き換えが得られることになる．つまり，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ の0による置き換え——これを“0-置換”と呼ぶことにしよう——によって，すでに，これが得られているか，0-置換により $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ が真になるような $\mathfrak{z}$ の例が得られ，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ をこの数表記 $\mathfrak{z}$ での置き換え——これを“例証置換”と呼ぶことにする——は，求めていた性質を満たすものとなる．

上の手続きを修正して，第2種の問題点となる論理式が存在するときでも適用できるようにするのは容易である．

項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ に属す第2種の問題点となる論理式は

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{t}) \to \varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \neq \mathfrak{t}'$$

という形をしている．ここで，項 $\mathfrak{t}$ は，場合によっては，項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ を含んでいる可能性がある．このような論理式は，0-置換により，常に真の論理式に変換される．したがって，もし0-置換で，すでに，全ての第1種の問題点となる論理式が，真の論理式に変換されているとすれば，目標は達成できたことになる．そうでない場合には，すでにみたように，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ の例証置換，つまり，数表記 $\mathfrak{z}$ で $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ が真の論理式となるものを得ることができる．また，このときには，$\mathfrak{A}(0)$ は偽の論理式となっている．$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ の $\mathfrak{z}$ による置き換えは，すでに第2種の問題点となる論理式を真の論理式に変換するものになっているとは限らない．第2種の問題点となる論理式はこの置き換えで

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{s}) \to \mathfrak{z} \neq \mathfrak{s}'$$

という形の論理式に変換されるが，無変数項 $\mathfrak{s}$ の値の計算で得られる数表記が $\mathfrak{r}$ として，この論理式は，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{r}) \to \mathfrak{z} \neq \mathfrak{r}'$$

と同じ真偽値を持つ．ところが，この論理式は，偽である可能性がある．つまり，$\mathfrak{z}$ と $\mathfrak{r}'$ とが等しく，$\mathfrak{A}(\mathfrak{r})$ が真の論理式となるときがそうである．ところが，このときには，$\mathfrak{r}$ は $\mathfrak{z}$ より小さく，かつ $\mathfrak{A}(\mathfrak{r})$ を真とするような数表記となっている．

このような可能性に対しては，以下のような対処ができる．例 $\mathfrak{z}$ を得た後で，論理式

$$\mathfrak{A}(0), \mathfrak{A}(0'), \mathfrak{A}(0''), \ldots, \mathfrak{A}(\mathfrak{z})$$

の真偽値を調べてゆく．これらのうち，最初のものは偽の論理式で，最後のものは真の論理式であることがわかっている．$\mathfrak{A}(\mathfrak{m})$ をこの列の中で最初の真の論理式とする．このとき，2 番目の置き換では，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ を数表記 $\mathfrak{m}$ で置き換えるものとする．まず，$\mathfrak{A}(\mathfrak{m})$ は真の論理式だから，この置き換えにより第 1 種の問題点となる論理式は全て真の論理式に変換されることがわかる．ところが，第 2 種の問題点となる論理式も，全て真の論理式に変換される．上記の考察から，第 2 種の問題点となる論理式が偽の論理式に変換されていたすると，$\mathfrak{m}$ より小さな数表記 $\mathfrak{r}$ で，$\mathfrak{A}(\mathfrak{r})$ が真となるようなものが存在しなければならないが，これは $\mathfrak{m}$ のとり方に矛盾するからである．したがって，実際に，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ の $\mathfrak{m}$ による置き換えは，全ての問題点となる論理式を真の論理式に変換する．

このようにして，次のような解決策が得られた．0-置換により，すでに求めるものが得られているか，そうでない場合には，$\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ が真となっているような例としての 0 と異なる数表記 $\mathfrak{z}$（例証置換）を得ることができ，$0'$ から $\mathfrak{z}$ までの間の数表記 $\mathfrak{n}$ で $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ が真の論理式となるようなもののうち最小のもの $\mathfrak{m}$ ——これを“最小置換”と呼ぶことにする——をとれば，$\mathfrak{m}$ により，全ての問題点となる論理式は真の論理式に変換される．

以上により，上で考察した特殊な場合における正規化された証明に現れる ε-項の除去の手続きで，求めていた性質を持つものが得られた．そこで，今度の課題は，この手続きを数論の形式的体系での任意の正規化された証明に適用できるような形につくり直すことである．

このためにまず，問題を簡単にするための一般的な注意として，我々の目的のためには，与えられた正規化された証明で問題点となる論理式，あるいは ε-同等性論理式の中に現れるような ε-項のみを考察すれば十分であるということを述べておこう．なぜなら，このような ε-項の問題点となる論理式と ε-同等性論理式が真の論理式に変換されるような数表記による置き換えが求まったときには，推論図式と繰り返しを損なうことなく，残っている ε-項を全て数表記 0 で置き換えることができるからである．

したがって，このようなものは，最初から正規化された証明の考察からはず

して考えてよい．我々の課題は，いずれにしても，考察している数論の形式的体系に属す具体的に与えられた問題点となる論理式と ε-同等性論理式の集合に対し，そこに現れる ε-項の置き換えで，それにより，これらの論理式が真の論理式となるようなものを求めることである．このような置き換えの全体を，該当する問題点となる論理式と ε-同等性論理式の集合に対する“レゾルベント”と呼ぶことにする．

最初に述べた特殊な場合では，問題点となる論理式だけが問題となっており，さらに，ただ1つの ε-項がこれらの中に現れると仮定した．この場合の取り扱いから，問題点となる論理式の集合が次数1階数1を持つもののみからなるような場合，つまり，問題点となる論理式の属す ε-項の全てが，それに格納された ε-項も，それの下位にある ε-表現も持たないような場合についてのレゾルベントの確定の手続きがただちに求まる．

このような条件のもとでは，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}) \rightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))$$

または

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}) \rightarrow \varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \neq \mathfrak{k}'$$

が与えられた問題点となる論理式の1つとして，論理式 $\mathfrak{A}(c)$ は ε-項を含まない．したがって，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ 以外の ε-項の現れる可能性のあるのは $\mathfrak{k}$ の中だけである．

このことから，問題点となる論理式のそれぞれに現れる ε-項で問題点となる論理式が属してはいないようなものを全て数表記0で置き換えても，これらの問題点となる論理式の特徴的な形態は壊されないことがわかる．これによって，問題点となる論理式の属す ε-項——これらの項を適当に並べて“$\mathfrak{c}_1$”,…,“$\mathfrak{c}_\mathfrak{p}$”と表すことにする——以外には他の ε-項はまったく現れないとしてよいことがわかる．

ここで，項 $\mathfrak{c}_1,\ldots,\mathfrak{c}_\mathfrak{p}$ への適切な置き換えをみつけなければならない．項 $\mathfrak{c}_1,\ldots,\mathfrak{c}_\mathfrak{p}$ を全部数表記で置き換える手続きは“全置換”と呼んでよいであろう．まず，項 $\mathfrak{c}_1,\ldots,\mathfrak{c}_\mathfrak{p}$ のそれぞれを0-置換するような全置換を考える．これにより，全ての問題点となる論理式が真の論理式に変換されれば，この0-置換がすでにレゾルベントである．そうでない場合には，項 $\mathfrak{c}_\mathfrak{r}$ $(\mathfrak{r}=1,\ldots,\mathfrak{p})$ の1つ以上に

対して例証置換がとれて，これから最小置換が求まる．ここで，今度は，最小置換のみつかった項 $\mathfrak{c}_\mathfrak{r}$ について，前の 0-置換の代わりに，この最小置換で $\mathfrak{c}_\mathfrak{r}$ を置き換えるような全置換を考える．このとき，これらの ε-項に属す問題点となる論理式は全て真の論理式に変換される．もし，その他の ε-項に属す問題点となる論理式も，全て真の論理式に変換されていれば，これによりレゾルベントが求まったことになる．そうでなければ，項 $\mathfrak{c}_1,\ldots,\mathfrak{c}_\mathfrak{p}$ の中のさらに幾つかのものについて最小置換を求めることができて，前に求められた最小置換は，その際変化しない．したがって，その前にまだレゾルベントが求まっていないような場合には，$\mathfrak{p}$ 番目の全置換で，項 $\mathfrak{c}_1,\ldots,\mathfrak{c}_\mathfrak{p}$ の全ての最小置換が求まり，これらの全ての最小置換を用いる $(\mathfrak{p}+1)$ 番目の全置換では，全ての問題点となる論理式が真の論理式に変換される．

これにより，最大で $(\mathfrak{p}+1)$ の長さを持つ全置換の列からなるレゾルベントの確定に至る一意に指定された手続きが得られたことになる．

注意． 例証置換から最小置換への移行は，第 2 種の問題点となる論理式の属す項 $\mathfrak{c}_\mathfrak{r}$ についてのみ必要となるということに注意しておく．他のものについては，例証置換をそのまま用いればよい．

b) 一般の場合の扱いのための準備． 今までに扱うことのできたのは，まだ，ごく特殊な場合に限られていたので，問題点となる論理式の次数と階数に対する制限を取り除いて，それに対してレゾルベントを求めようとしている論理式の集合についても，問題点となる論理式の他にも，ε-同等性論理式が含まれている可能性のある場合も，取り扱えるようにしたい．このための準備として，ε-項での格納と上位の関係が我々の置き換えの手続きに，どのような影響を及ぼしうるかをはっきりさせておくとよい．一般の場合には，ある数表記 $\mathfrak{z}$ が $\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ という項の例証置換となっている，あるいは，さらに最小置換となっているかどうかは，$\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ または $\mathfrak{A}(0)$，$\mathfrak{A}(0'),\ldots,\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ に現れる ε-項の置き換えの値に依存して決まるため，問題は実質的な複雑さを持つことになるのであるが，このような ε-項の現れ方は $\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ の次数と階数，つまり，この項での格納および上位の関係の現れ方に依存することになるからである．

格納と上位の関係についてはすでに詳しく調べた[62]が，ここでは特に，以下の事実について注意する．

---

[62] 69–74 ページ参照．

1. $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ に格納された ε-項の全ては，$\mathfrak{A}(c)$ に現れ，変数 c は含まない．逆に，$\mathfrak{A}(c)$ にこのようじて現れる ε-項は $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ に格納されているから，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ より次数が低い．

2. 項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ の下位にある ε-表現は，全て変数 c を含むような $\mathfrak{A}(c)$ に現れる ε-項に対応し，この ε-項は，ε-表現での変数 $\mathfrak{x}$ を変数 c で置き換えたものとなっている．逆に，$\mathfrak{A}(c)$ に現れる変数 c を含む全ての ε-項は，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ の下位にある ε-表現に対応して，この ε-表現での $\mathfrak{x}$ を変数 $\mathfrak{c}$ で置き換えることで，もとの ε-項が得られる．したがって，このような ε-項は，全て $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ より低い階数を持つ，

1 での観察から，階数 1 の ε-項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ においては，置き換えにより生じる状況は比較的単純であることがわかる．つまり，この場合には，1つの全置換に関するある数表記 $\mathfrak{s}$ での $\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$ の真偽値は，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ に格納された ε-項にのみ依存する．したがって，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ の例証置換と最小置換は，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ に格納された ε-項，つまり，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ より低い次数のものに対する例証置換がすでに求まっている場合に初めて可能になる．特に，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ が次数 1 を持つときには，この項に対する例証置換あるいは最小置換は，そのようなものとして最終的なものとなる．

このようにして，階数 1 の問題点となる論理式のみが現れる場合には，後で示すように[63]，最初に予測できる回数以内の全置換を繰り返すことでレゾルベントに行き着けるような，後戻りが可能となる．

しかし，これについての考察を始める前に，問題点となる論理式で 1 より大きい階数が現れる場合の，我々の置き換えの手続きに関する状況についてもう少し詳しくみておきたい．というのは，階数が 1 より大きい問題点となる論理式の考察において，我々の今までの形の置き換えの手続きが，まだ十分なものでないことがはっきりとしてくるのである．ここで，以下のような問題が起こる．

もし，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ の階数が 1 より大きいなら，前出の 2 により，論理式 $\mathfrak{A}(c)$ で変数 c はある ε-項 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(c,\mathfrak{v})$ の中に現れる．つまり，$\mathfrak{A}(c)$ は，$\mathfrak{K}(c,\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(c,\mathfrak{v}))$ という形をしている[64]．したがって，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ に属す第1種の問題点となる論理

---

[63] 164–169 ページ，c) 参照．

[64] この $\mathfrak{K}(c,\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(c,\mathfrak{v}))$ という表記は，変数 c は表現 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(c,\mathfrak{v})$ の外側に現れる可能性があるが，必ずしも現れているとは限らないという意味で用いられている．

式は

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{k}, \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{k}, \mathfrak{v})) \rightarrow \mathfrak{K}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}), \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}), \mathfrak{v}))$$

という形をしている．この論理式に関して，これを偽の論理式に変換するような全置換が与えられたとき，それにより，$\mathfrak{k}$ での置き換えと無変数項の付値により決まる数表記 $\mathfrak{z}$ をとることで，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ の例証置換が求められるためには，項 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{k}, \mathfrak{v})$ が全置換により得る値は，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{v})$ で決まるものでなくてはならない．そうでなければ，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ が対応する全置換により真の論理式に変換されることを帰結することが，まったくできなくなってしまうからである．ところが，項 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{v})$ が，それまでの我々の論理式の集合の中にすでに現れている保証はまったくない．

したがって，与えられた論理式の領域の中に現れる ε-項による置き換えだけでは，先に進めなくなってしまう．しかし，ここで，ε-項の置き換えを**内側からの逐次的な還元**の方法を考えることで，ただちに 1 つの打開策が得られる．

これがどういう意味かを次の例で示すことにする．次の ε-項の置き換えを考える:

$$\varepsilon_x\mathfrak{A}(x, \varepsilon_y\mathfrak{B}(y, \varepsilon_z\mathfrak{C}(z) + 3) \cdot 5, 2 \cdot 1).$$

ここで，ε-記号は明記したもの以外は現れないものとし，項についても明記したもの以外は構成要素として現れないものとする．“内側からの” 置き換えは次のように行われる: まず，無変数項 $2 \cdot 1$ をその数表記による値 $0''$ で置き換える．さらに，$\varepsilon_z\mathfrak{C}(z)$ に対し，それの置き換えとしての数表記 $\mathfrak{c}$ を求めて，$\varepsilon_x\mathfrak{C}(z) + 3$ を，対応する項 $\mathfrak{c} + 3$ の値の数表記 $\mathfrak{c}'''$ で置き換える．こうしておいて，今度は，項 $\varepsilon_y\mathfrak{B}(y, \mathfrak{c}''')$ を置き換える数表記 $\mathfrak{b}$ を求めて，項 $\mathfrak{b} \cdot 5$ の値に対応する数表記 $\mathfrak{n}$ で置き換え，最後に，$\varepsilon_x\mathfrak{A}(x, \mathfrak{n}, 0'')$ を置き換える数表記を求める．

この置き換え方の原理は，ある ε-項に対し，そこに構成要素として現れる項で，もともとは数表記でなかったものが，その前に行われた置き換えと，評価により，全て数表記に変換されてたときに，初めてその置き換えが行われることである．したがって，置き換えがなされるのは，常に数表記以外の項がその中に現れないような ε-項である．

この方法は，ある意味で事態を簡単に，別の意味では複雑にもしてしまう．簡単になるのは，直接に置き換えを施されるのは，常に次数 1 の ε-項であるとい

う点で，一方，複雑になるのは，直接の置き換えの行われる次数 1 の ε-項の全体は与えられた論理式の列だけで決定されるのではなく，選ばれた置き換えにも依存するという点である．

この内側からの逐次的な還元による置き換えの分解のメリットは，ヒルベルトの例証置換を求める方法が，次数の 1 より大きい問題点となる論理式にも適用できるようになるという，もともとの目標が実現できることであるが，その他にも，これにより，ε-同等性論理式が常に真の論理式に変換される点があげられる．なぜなら，

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$$

という論理式で，項 $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$ が，ある全置換において等しい数表記の値を得た場合には，内側からの逐次的な置き換えの方法により，項 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a})$，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$ も同じ数表記の値を得ているはずだからである．

逐次的な還元の方法の持つ，これらの長所にもかかわらず，階数が 1 より大きい問題点となる論理式の扱いに対しては，この方法は十分に満足のゆくものといえない．

前にすでに考察したように，階数が 1 より大きい問題点となる論理式は，

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{k}, \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{k}, \mathfrak{v})) \to \mathfrak{K}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}), \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}), \mathfrak{v}))$$

という形をしている．ここに，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ は ε-項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{K}(\mathfrak{x}, \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{k}, \mathfrak{v}))$ で，この ε-項に問題点となる論理式が属している．この項に対する例証置換 $\mathfrak{z}$ は，ある全置換において，上の問題点となる論理式が偽の論理式に変換されたとき，これの前節は真となっているから，$\mathfrak{k}$ 自身，あるいは，全置換によって得られる $\mathfrak{k}$ の値を $\mathfrak{z}$ と置くことによって求めることができる．

（前節

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{k}, \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{k}, \mathfrak{v}))$$

の真偽値が，全置換により，本当に論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$，つまり，

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{z}, \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{v}))$$

がこの全置換により得る真偽値と一致することは，我々の逐次的な還元の方法により確保される．）

ところが，ここで，論理式

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{z}, \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{v}))$$

の真偽値は，ここで考察している全置換による，項 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{v})$ の置き換えられた値に依存するというめんどうな事態が起こってしまう．つまり，それの下位にある ε-表現 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, \mathfrak{v})$ を含む ε-項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ の例証置換が，そのようなものとして（つまり，例証置換としての性質を持つものとして），下位にある項で，変数 $\mathfrak{x}$ を数表記 $\mathfrak{z}$ で置き換えて得られる項 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{v})$ の置き換えに依存するということである．この項 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{v})$ は——ついでにいうと，この数表記 $\mathfrak{z}$ は全置換が求まった後にならないと決まらないかもしれないものであるが——$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, \mathfrak{v})$ と同じ階数を持つから，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ の階数より低くなる．

階数 $\mathfrak{k}+1$ の項の例証置換が，$\mathfrak{k}$ 以下の階数を持つ項の置き換えに依存するという状況は，後戻りの方法を与えることになるが，一般の場合についても，例証置換をみつけてゆく方法に決着をつけるために，これを何とかして利用しなくてはならない．

この後戻りを階数に関してすっきりした形にまとめるために，高い次数の項の置き換えを，逐次的な還元の方法により，次数 1 の項の置き換えから組み立てたときと類似のやり方により，階数の 1 より大きい ε-項の置き換えを階数 1 の ε-項の置き換えの組み合わせで実現することを考える．

これがどのようなものになるかをみるために，簡単な場合についてみてみよう．一方で，次数 2 の ε-項

$$\varepsilon_x \mathfrak{K}(x, \varepsilon_y \mathfrak{L}(y))$$

を考え，他方，階数が 2 の

$$\varepsilon_x \mathfrak{K}(x, \varepsilon_y \mathfrak{L}(x, y))$$

を考える．両方には，明記されたもの以外には ε-記号は現れないものとする．1番目の項に対する置き換えは，逐次的な還元の方法により，まず，$\varepsilon_y \mathfrak{L}(y)$ をある数表記で $\mathfrak{z}$ 置き換え，その次に，$\varepsilon_x \mathfrak{K}(x, \mathfrak{z})$ をある数表記で置き換えるというように行われる．この際に，数表記 $\mathfrak{z}$ は 2 重の役割を担っている．一方では，$\mathfrak{z}$ は，次数 2 の ε-項で $\varepsilon_y \mathfrak{L}(y)$ に代わって現れ，これにより，その ε-項が次数 1 のものに変換される．他方では，$\varepsilon_y \mathfrak{L}(y)$ がそれ自身として（つまり，それを含む ε-項の部分としてではなく）現れる場合には，$\mathfrak{z}$ はその確定値を与え

る．したがって，数表記 $\mathfrak{z}$ は，一方では項として，他方では値として用いられることになる．

今度は，項 $\varepsilon_x\mathfrak{K}(x,\varepsilon_y\mathfrak{L}(x,y))$ の置き換えを類似の方法で行おうとすると，項 $\varepsilon_y\mathfrak{L}(y)$ の数表記による置き換え $\mathfrak{z}$ は $\varepsilon_y\mathfrak{L}(x,y)$ の数表記による置き換えに対応しえないことは，数表記 $\mathfrak{z}$ に対し，記号列 $\varepsilon_x\mathfrak{K}(\mathfrak{z})$ がもはや項とならないことからもわかる．$\varepsilon_y\mathfrak{L}(x,y)$ 置き換えのためには，むしろ，外側から束縛されるような変数 x を含むような表現を選ぶべきである．置き換えの適当な施行のための留意点は，置き換えの持つ2重の役割をうまく保とうと試みるときにも，明らかになってくる．(最初の方の例での) 項 $\varepsilon_y\mathfrak{L}(y)$ が "それ自身として"，つまり他の項に格納されずに現れていることに対応するのは，ある項 $\mathfrak{a}$ に対する $\varepsilon_y\mathfrak{L}(\mathfrak{a},y)$ という項である．$\varepsilon_y\mathfrak{L}(x,y)$ への置き換えが，$\varepsilon_y\mathfrak{L}(\mathfrak{a},y)$ という形の項の全てに対して，付値を与える用をなすためには，つまり，$\mathfrak{a}$ の値がわかっているとき，それからこのような項の値を与えられるためには，全ての与えられた数表記 $\mathfrak{s}$ に対し，項 $\varepsilon_y\mathfrak{L}(\mathfrak{s},y)$ の数表記の値への対応が与えられなければならない．

この要請を留意することにより，次のような "関数置換" の方法に到達する．まず，表現 $\varepsilon_y\mathfrak{L}(x,y)$ から出発して，外から束縛されている変数 x を自由個体変数，例えば，c で入れ換えて "代入型" をつくる．この代入型 $\varepsilon_y\mathfrak{L}(c,y)$ に対し，パラメータ c を持つ関数記号 $\mathfrak{f}$ を，任意の数表記 $\mathfrak{s}$ が与えられたとき，それから数表記による $\mathfrak{f}(\mathfrak{s})$ の値が求められるような計算規則とともに，置き換えとして与える．

このようにして導入される関数記号の全ては，基礎となっている我々の数論の形式的体系に付加されるものとみなす．これらの関数記号に対しては，公理が付け加えられるわけではなく，これにより生成される無変数項の計算規則が与えられているだけなので，これらの付加により，導出の規則は何らの変更も受けない．

導入される関数の付値に関しては，(1つ以上のパラメータを持つ) 置き換え関数で，たかだか有限個のパラメータの値，あるいは値の組に対し 0 と異なる値をとるようなものを考えれば十分であるから，そのような有限個のパラメータあるいはパラメータの組とそれに対応した関数値を枚挙したもので与えることができる．

代入型 $\varepsilon_y\mathfrak{L}(c,y)$ に対して与えられた関数置換 $\mathfrak{f}(c)$ の論理式への記入は，そ

れぞれの ε-項，あるいは ε-表現 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{L}(\mathfrak{a},\mathfrak{v})$ で，変数 $\mathfrak{v}$ が $\mathfrak{a}$ の中に現れないようなものに対し，対応する表現 $\mathfrak{f}(\mathfrak{a})$ が代入されることでなされる．特に，これにより，$\varepsilon_x\mathfrak{K}(\varepsilon_y\mathfrak{L}(x,y))$ から，階数 1 の項 $\varepsilon_x\mathfrak{K}(\mathfrak{f}(x))$ が得られる．このように，項 $\varepsilon_x\mathfrak{K}(\varepsilon_y\mathfrak{L}(x,y))$ に対する置き換えは，まず，$\varepsilon_y\mathfrak{L}(c,y)$ に対し，関数 $\mathfrak{f}(c)$ を与え，次に，項 $\varepsilon_x\mathfrak{K}(\mathfrak{f}(x))$ に数表記の置換が選ばれることで実行できる．

この項 $\varepsilon_x\mathfrak{K}(\varepsilon_y\mathfrak{L}(x,y))$ ——これを略して "$\mathfrak{e}$" と記すことにする——に属す問題点となる論理式

$$\mathfrak{K}(\varepsilon_y\mathfrak{L}(\mathfrak{k},y)) \to \mathfrak{K}(\varepsilon_y\mathfrak{L}(\mathfrak{e},y))$$

は，$\varepsilon_y\mathfrak{L}(c,y)$ の $\mathfrak{f}(c)$ による置き換えにより，階数 1 の問題点となる論理式

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{f}(\mathfrak{t})) \to \mathfrak{K}(\mathfrak{f}(\varepsilon_x\mathfrak{K}(\mathfrak{f}(x))))$$

に移行する．

上で述べた関数置換の方法は，ε-項が上位関係でと同様に，入れ子になっている場合にも，置き換え関数を複数のパラメータを持つものとしなければならない場合がある点を除けば，容易にそのまま適用することができる．例えば，階数 3 の項

$$\varepsilon_x\mathfrak{A}(x,\varepsilon_y\mathfrak{B}(x,y,\varepsilon_z\mathfrak{C}(z),\varepsilon_z\mathfrak{F}(y,z),\varepsilon_z\mathfrak{G}(x,y,z)))$$

で，明記されたもの以外には ε-記号は現れないようなものに対しての，関数置換の方法の適用は以下のようになる．まず，階数 1 の ε-表現は，

$$\varepsilon_z\mathfrak{C}(z),\qquad \varepsilon_z\mathfrak{F}(y,z),\qquad \varepsilon_z\mathfrak{G}(x,y,z)$$

である．$\varepsilon_z\mathfrak{C}(z)$ に対しては，数表記による置き換え $\mathfrak{c}$ を選ぶ．他の 2 つについては，対応する代入型，例えば

$$\varepsilon_x\mathfrak{F}(a,z),\qquad \varepsilon_z\mathfrak{G}(a,b,z)$$

を選び，これらに対する関数置換 $\mathfrak{f}(a)$，$\mathfrak{g}(a,b)$ を求める．これらの置き換えを記入することで，与えられていた ε-項は，階数 2 の ε-項

$$\varepsilon_x\mathfrak{A}(x,\varepsilon_y\mathfrak{B}(x,y,\mathfrak{c},\mathfrak{f}(y),\mathfrak{g}(x,y)))$$

に移行する．ここで現れる階数 1 の ε-表現

$$\varepsilon_y\mathfrak{B}(x,y,\mathfrak{c},\mathfrak{f}(y),\mathfrak{g}(x,y))$$

は，外から束縛された変数 x を持っているが，これの代入型を

$$\varepsilon_y \mathfrak{B}(a, y, \mathfrak{c}, \mathfrak{f}(y), \mathfrak{g}(a, y))$$

として，この置き換えを $\mathfrak{h}(a)$ とする．この置き換えの階数 2 の ε-項への記入により，階数 1 の ε-項

$$\varepsilon_x \mathfrak{A}(x, \mathfrak{h}(x))$$

が得られ，これの数表記による置き換えが選ばれる．

このようなやり方により，逐次的な還元の一般化で，格納に対するのみでなく，ε-項の上位の関係に対しても適用できるような求めていた性質のものが得られた．

ところが，この手法には，まだ少し具合いの悪いところがあって，そのために，最後に，もう 1 つ，この置き換えのプロセスの補正をしなくてはならない．つまり，関数置換を幾つも組み合わせて行うとき，異なる代入型から同一の ε-項が得られる可能性があり，そのために，そのような項の置き換えが一意に決まらなくなるという事態が起こりうるということである．例えば，1 つの全置換の中で，代入型 $\varepsilon_x \mathfrak{B}(0, c, x)$ に対して関数置換 $\mathfrak{f}(c)$ を，一方，代入型 $\varepsilon_x \mathfrak{B}(a, 0', x)$ に対して関数置換 $\mathfrak{g}(a)$ を行うとすると，項 $\varepsilon_x \mathfrak{B}(0, 0', x)$ に対して 2 種類の置き換え $\mathfrak{f}(0')$，$\mathfrak{g}(0)$ ができてしまうが，これらは $\mathfrak{f}$ のパラメータ $0'$ での値と $\mathfrak{g}$ のパラメータ 0 での値が一致しない限り，ちぐはぐなものとなっている．このように，置き換え関数の間に，ある種の同等条件が必要になり，これらの関数の選択の際に，これを考慮する必要が生じる可能性がある．

しかし，これはめんどうなので，このような事態を回避する方法を考える．上のような場合には，2 つの代入型 $\varepsilon_x \mathfrak{B}(0, c, x)$，$\varepsilon_x \mathfrak{B}(a, 0', x)$ の代わりに，2 つの変数を持つ代入型 $\varepsilon_x \mathfrak{B}(a, c, x)$ を導入して，これに対し関数置換 $\mathfrak{h}(a, c)$ を与えることができる．もっと一般的な方法は，同一の ε-項が 2 つの異なる代入型から生じるのは，これらの代入型が同じ**基本タイプ**[65]を持つときに限るという観察から得られる．実際，1 つの代入型から，そこに現れる幾つかの変数を何らかの項で置き換えて得られる項は，もとの代入型と同じ基本タイプを持つ．

したがって，いたるところで代入型に対してその基本タイプに立ち戻って，これに対して関数置換を行うことにより，上で述べた問題は完全に回避できる．基

[65] 108 ページ参照．

本タイプは，項として，パラメータ変数を適当に書き換えることで代入型とみなされるから，これに対する置き換え関数を，パラメータ変数がその基本タイプのそれと等しいような1つの関数記号で与えればよい．これにより，例えば，$\varepsilon_y\mathfrak{L}(a,y)$ に対する関数置換は，この項が $\varepsilon_y\mathfrak{L}_1(\mathfrak{q},\mathfrak{r}(a),\mathfrak{t}(a),y)$ というような形をしており，$\varepsilon_y\mathfrak{L}_1(b,c,d,y)$ が階数1の基本タイプなら，この基本タイプに対して関数置換 $\mathfrak{f}(b,c,d)$ を求めて，$\varepsilon_y\mathfrak{L}(a,y)$ への置き換えとして項 $\mathfrak{f}(\mathfrak{q},\mathfrak{r}(a),\mathfrak{t}(a))$ が得られる．このとき，$\varepsilon_y\mathfrak{L}(x,y)$ への置き換えは $\mathfrak{f}(\mathfrak{q},\mathfrak{r}(x),\mathfrak{t}(x))$ となる．

ついでながら，この手続きの初めにおいてつくられた代入型は，実は省くことができる．ε-表現から直接"その"基本タイプに移行できるからである．実際，ε-項のみでなく，ε-表現に対しても，パラメータ変数の命名を除いて，一意に基本タイプを対応させることができる．つまり，全ての ε-表現から，外から束縛された変数（つまり束縛変数で，この ε-表現に現れる ε-記号に属していないようなもの）を自由変数で置き換えて得られる ε-項の1つの基本タイプを対応させればよい．この意味で，一般に ε-表現の基本タイプを考えることができる．

上に述べたような意味で基本タイプを関数置換の実行に際して用いることにすると，その結果として，**全ての ε-項および ε-表現の置き換えは基本タイプの置き換えによってなされる**ことになり，このとき，おのおのの直接の置き換えは階数1の基本タイプに対し行われる．これが可能であることは，次のようにしてわかる．

1. 自由変数を含まないような ε-項 $\mathfrak{e}$ ——問題点となる論理式や ε-同等性論理式に現れるのは，このような ε-項にのみである——に対し，$\mathfrak{e}$ の基本タイプがパラメータを持つ場合はその基本タイプの関数置換が，持たない場合には数表記置換が与えられていて，$\mathfrak{e}$ に格納された全ての ε-項についても，すでに数表記置換が与えられているときには，無変数項の付値により $\mathfrak{e}$ の数表記の値を得ることができる．

もし $\mathfrak{e}$ の基本タイプがパラメータを持たないなら，$\mathfrak{e}$ はすでにそれ自身の基本タイプとなっており，$\mathfrak{e}$ の基本タイプの数表記置換は，$\mathfrak{e}$ の数表記による置き換えに他ならない．もし，$\mathfrak{e}$ の基本タイプがパラメータを持つ場合には，上の条件のもとで，$\mathfrak{e}$ に現れるその基本タイプのパラメータには（直接に，あるいは計算によって）数表記の値が与えられている．この値をパラメータに用いて $\mathfrak{e}$ の基本タイプの関数置換により，関数値としての数表記が求まる．

2. 階数 $\mathfrak{k}+1$ の基本タイプ $\mathfrak{g}$ に対しては，項 $\mathfrak{g}$ の下位にある階数1の ε-表現

の基本タイプの全てに対する関数置換が与えられ，さらに，階数 $\mathfrak{k}$ の基本タイプで，$\mathfrak{g}$ におのおのの関数置換を記入することで得られるものについても，このようにして形成される基本タイプがパラメータを持つかどうかに応じて，関数置換または数表記置換が与えられているときに，$\mathfrak{g}$ の関数置換または数表記置換を得ることができる．

階数 $\mathfrak{k}+1$ の項に（階数 1 の ε-表現の基本タイプの）関数置換を記入することで階数 $\mathfrak{k}$ の ε-項が得られることは，階数の定義[66]から明らかである．この階数 $\mathfrak{k}$ の ε-項が再び基本タイプになることは，関数置換により，$\mathfrak{g}$ のパラメータに入っている変数は何の変化も受けないこと，また，それにより，新しい項が構成要素として付け加わることもないことからわかる．

1 により，与えられた論理式の列に現れる ε-項の数表記置換の決定を，基本タイプへの置き換えに帰着させるための計算規則が得られ，2 により，階数が 1 より大きい基本タイプへの置き換えを，逐次的に，そのような基本タイプで階数 1 のものに帰着させるための計算規則が得られる．

このような ε-項に対する数表記置換の構成においては，基本タイプの**直接の数表記置換および関数置換**としての “全置換” と，与えられた論理式の中に現れる ε-項の **“実際の” 置き換え**とを区別する必要がある．全置換から，実際の置き換えが決まるが，逆は一般にはいえない．置き換えを指定すべき基本タイプは，最初は，与えられた論理式の列に現れる現れる階数 1 の ε-表現の基本タイプであるが，後には，もっと高い階数を持つ ε-表現から，それの下位にある ε-表現に対する関数置換を書き込むことで得られる階数 1 の ε-表現の基本タイプも含まれることになる．ここで，この書き込みは，逐次的に “内側から順に” 行われるので，それぞれについては，階数 1 の基本タイプのみに対する置き換えが行われることになる．

例として，項

$$\varepsilon_x\{\delta(x)+\varepsilon_y[\varepsilon_z(y\cdot y=(z\cdot(z\cdot z))')+\varepsilon_z((4\cdot 5)\cdot(x+y)=z\cdot z) \\ =x+\varepsilon_z(z+z\neq z)\cdot y']=0''''\}$$

に対する置き換えの構成をみてみよう．この項を $\mathfrak{e}$ で表すことにして，$\mathfrak{e}$ は，基本タイプ

$$\varepsilon_x\{\delta(x)+\varepsilon_y[\varepsilon_z(y\cdot y=(z\cdot(z\cdot z))')+\varepsilon_z(a\cdot(x+y)=z\cdot z)=x+b\cdot y']=c\}$$

[66] 71 ページ参照．

を持つが，これを $\mathfrak{g}$ で表すことにする．$\mathfrak{e}$ の数表記置換は，我々の方法では，$\mathfrak{g}$ への関数置換 $\mathfrak{g}_1(a,b,c)$ と，$\varepsilon_z(z+z\neq z)$ への数表記置換 $\mathfrak{z}$ から得ることができる．つまり，$\mathfrak{g}_1(a,b,c,)$ と $\mathfrak{z}$ から，$\mathfrak{e}$ の置き換えとして

$$\mathfrak{g}_1(4\cdot 5,\ \mathfrak{z},\ 0'''')$$

が得られるが，これから，$\mathfrak{g}_1(a,b,c)$ に対して確定する値を用いて，ある数表記の値が得られる．ここで，基本タイプ $\mathfrak{g}$ の階数は 3 だから，これの置き換え $\mathfrak{g}_1(a,b,c)$ は直接に求まるわけではなくて，階数 1 の基本タイプへの置き換えを経て決定される．このために，まず $\mathfrak{g}$ の中の

$$\varepsilon_z(y\cdot y=(z\cdot(z\cdot z))'),\qquad \varepsilon_z(a\cdot(x+y)=z\cdot z)$$

という階数 1 の ε-表現を取り出してみる．これらの基本タイプは

$$\varepsilon_z(c=(z\cdot(z\cdot z))'),\qquad \varepsilon_z(c=z\cdot z)$$

である．これらに対し，関数置換 $\mathfrak{f}_1(c)$，$\mathfrak{f}_2(c)$ を選んで，$\mathfrak{g}$ に記入すると，階数 2 の基本タイプ

$$\varepsilon_z\{\delta(x)+\varepsilon_y[\mathfrak{f}_1(y\cdot y)+\mathfrak{f}_2(a\cdot(x+y))=x+b\cdot y']=c\}$$

が得られる．ここに現れる階数 1 の ε-表現

$$\varepsilon_y[\mathfrak{f}_1(y\cdot y)+\mathfrak{f}_2(a\cdot(x+y))=x+b\cdot y']$$

は，基本タイプ

$$\varepsilon_y[\mathfrak{f}_1(y\cdot y)+\mathfrak{f}_2(a\cdot(c+y))=d+b\cdot y']$$

を持つ．これに対し関数置換 $\mathfrak{h}(a,b,c,d)$ を選び，これを $\mathfrak{g}$ に記入すると，基本タイプ

$$\varepsilon_x\{\delta(x)+\mathfrak{h}(a,b,x,x)=c\}$$

が得られる．ここで，この階数 1 の基本タイプに対し関数置換を選べば，これが基本タイプ $\mathfrak{g}$ の置き換え $\mathfrak{g}_1(a,b,c)$ となっている．

ここで $\mathfrak{e}$ の数表記置換を得るにあたって，$\mathfrak{e}$ に現れる 5 つの異なる ε-表現（$\mathfrak{e}$ 自身も含む）に対する 5 つの基本タイプへの直接の置き換えがなされる．つまり，まず，そこに現れる 3 つの階数 1 の ε-表現

$$\varepsilon_z(y\cdot y=(z\cdot(z\cdot z))'),\qquad \varepsilon_z((4\cdot 5)\cdot(x+y)=z\cdot z),\qquad \varepsilon_z(z+z\neq z)$$

に対する置き換え，それから，階数が 2 と 3 の ε-表現の基本タイプから，下位にある ε-表現に対する関数置換を順に記入してゆくことで得られる階数 1 の基本タイプである．

置換関数に割り当てられる記号については，異なる基本タイプに対して（異なる置換関数が同じ関数値をとるような場合でも），常に異なる関数記号が用いられるべきであるという点を注意しておこう．これは，置き換え関数への記号の割り当ての際に ε-項の間の同等関係に関して，基本タイプの導入によって阻止できたようなものと同種類のめんどうな事態が起こらないようにするために必要である．

使用される関数記号に関しては，論理式の列に対し置換関数の選択とは独立な命名が可能である．例えば，関数記号に続けて添数，あるいは 2 重添数を付ければよい[67]．具体的には述べないが，これに関する適当な規定がなされているとする．

c) 階数 1 の ε-項に制限した場合のヒルベルトの証明方針の実行．　上で，我々の課題であった[68]与えられた問題点となる論理式と，ε-同等性論理式に関するレゾルベントの確定に必要な性質が，一般的な場合にも成り立つような置き換えを行うための方法が得られた．この新しい置き換えの方法により，ヒルベルトの証明方針でのレゾルベントがどのようにして得られるかをみてみよう．

まず，この基本タイプによる置き換えの方法では，逐次的な還元の方法ですでにそうであったように，どの全置換においても，ε-同等性論理式は真の論理式となる点を注意しておく．つまり，ε-同等性論理式

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \rightarrow \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}) = \varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$$

において，同じ基本タイプを持っている項 $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a})$，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$ に対する置き換えは，この基本タイプに対する関数置換と，そこに格納されている ε-項があれば，それらへの数表記置換によって行われる．したがって，ある全置換において，項 $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$ が同じ値を得た場合には，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{a})$，$\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{b})$ も同じ数表記置換を得ることになり，したがって，この論理式の後節は真の論理式となる．一方，$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ がある全置換により異なる値を得た場合には，この論理式の前節は

---

[67] このような添数は，例えば項ではなく，関数記号の記号の一部分とみなされる．

[68] 151 ページ参照．

偽の論理式となる．何れの場合にも，この ε-同等性論理式は真の論理式に変換されることになる．これにより，レゾルベントを求める際には，問題点となる論理式のみに留意すればよいことがわかる．

さて，全置換の逐次的な生成の手続きを考察するにあたって，まず，与えられた論理式の列に現れる ε-項の階数が 1 のみである場合について考えてみよう．この場合には，我々の新しい置き換え法では，全置換はそこに現れる ε-項の基本タイプの置き換えを確定することで与えられる．まず，パラメータを持たない基本タイプについては，0-置換が選ばれており，パラメータを持つ基本タイプについては，同じ数のパラメータを持つ関数で全てのパラメータの値に対して関数値 0 をとるような関数が選ばれているような全置換から出発する．このような置き換えを "0-値のみの" 置換と呼ぶことにする．

問題点となる論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))$$

の例証置換の取得とその利用は，以下のようになされる．$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_n)$ を $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ の基本タイプとして，これのパラメータには $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ では，$\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n$ が入っているものとする．このとき，この問題点となる論理式は，

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n) \to \mathfrak{B}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n), \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n)$$

となる．この論理式から，例証置換が得られるのは，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ が 0 で置き換えられて，この問題点となる論理式が偽の論理式に変換される[69]ような全置換からである．この全置換により得られる項 $\mathfrak{k}$，$\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n$ の数表記の値が $\mathfrak{z}$，$\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$ なら，この全置換により選ばれた基本タイプ $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_n)$ の置き換え関数は，パラメータ $\mathfrak{z}$，$\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$ で値 0 をとる．一方，論理式 $\mathfrak{B}(0, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n)$ は偽で，$\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n)$ は真の論理式となっている．したがって，数表記 $\mathfrak{z}$ は，項 $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n$ に値 $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$ が与えられるような全ての全置換において，考察している問題点となる論理式を真の論理式に変換させるという意味で，1 つの例証置換となっている．同じ意味において，$0'$ から $\mathfrak{z}$ までの列の中の数 $\mathfrak{r}$ で $\mathfrak{B}(\mathfrak{r}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n)$ が真の論理式となるようなもののうち最小のもの $\mathfrak{m}$ は最小置換となっている．こうして求まった最小置換 $\mathfrak{m}$ を用いて，次の全置換で，基本タイプ $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_n)$ の前の置き換え関数の代わりにパラメータ $\mathfrak{z}_1, \ldots,$

[69] 150 ページ参照．

$\mathfrak{z}_n$ のところで，前の値 0 の代わりに $\mathfrak{m}$ をとるような新しい置き換え関数を選ぶ．この関数値は，その後の全置換でも保存される．

一般には，1つの全置換からは複数の例証置換とそれに伴う複数の最小置換が求まり，これらは，全部，次の全置換を構成する際に用いられる．しかし，例証置換と最小置換による変更以外には，全置換は何の変更も施されない．したがって，おのおのの置き換え関数も，たかだか有限個のパラメータの値，あるいは値の組について変更を受けるだけである．したがって，0-値のみの全置換から出発したのであったから，たかだか有限個のパラメータの値に対して 0 と異なるような値をとるような置き換え関数のみが現れることになる．

例証置換から最小置換に移行することで，全ての全置換において，第2種の問題点となる論理式が全て真の論理式に変換されることになる．つまり，基本タイプ $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_n)$ に属す第2種の問題点となる論理式は，

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{l}, \mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_n) \to \varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, \mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_n) \neq \mathfrak{l}'$$

という形をしているが，この論理式は，項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, \mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_n)$ の実際の置き換えが 0 となっているような全置換により，真の論理式に変換される．ある全置換で，この項が，0 と異なる実際の置き換えの値 $\mathfrak{r}$ を得ていて，項 $\mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_n$ は，値 $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$ を得ているなら，この全置換による基本タイプ $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_n)$ の置き換え関数は，パラメータ $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$ で関数値 $\mathfrak{r}$ を持つが，全置換のとり方から，この $\mathfrak{r}$ は，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n)$ の最小置換の性質を持っている．よって，ここで考察している第2種の問題点となる論理式の，上の全置換による変換で得られる論理式

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{s}, \mathfrak{z}, \ldots, \mathfrak{z}_n) \to \mathfrak{r} \neq \mathfrak{s}'$$

は真の論理式となる（$\mathfrak{s}$ は，ここで項 $\mathfrak{l}$ の得る数表記の値である）．

よって，全ての全置換において，ε-同等性論理式も第2種の問題点となる論理式も真の論理式となるから，ある全置換が，まだレゾルベントになっていない場合には，少なくとも1つの第1種の問題点となる論理式は偽となる．したがって，この全置換により少なくとも1つの例証置換をみつけることができ，これにより，次の全置換を構成することができる．

したがって，全置換の構成の繰り返しのプロセスが，最初に評価できる回数以内で停止すること，つまり，あるレゾルベントが得られることが，示せれば

よい．このために，まず，以下の点を確認しておこう:

1. ある基本タイプに対する置き換え関数になされる変更は，常に，1つ以上のパラメータの値，あるいは値の組で，前に関数値 0 が与えられていたものに対し，0 以外の値が与えられるという点のみである．0 と異なる関数値は，したがって，常に保持され，0 と異なる値がこれに加わることになる．同様に，パラメータを持たない基本タイプへの置き換えの変更は，0-置換の代わりに，0 と異なる数表記による置き換えがとられるという点のみである．

2. 全置換により確定する ε-項 $\mathfrak{e}$ の実際の置き換え[70]が，後の全置換で変更されるのは，この実際の置き換えが 0-置換で，これが別の数表記置換に変わったときか，実際の置き換えにより，$\mathfrak{e}$ に格納された ε-項が変更されたときに限る．

これの論拠は，前の主張 1. から $\mathfrak{e}$ への実際の置き換えは，$\mathfrak{e}$ の基本タイプの置き換えと，$\mathfrak{e}$ に格納された ε-項が存在する場合には，それらの実際の置き換えにより確定することを留意すれば明らかになる．

主張 2. の帰結として:

3. ある全置換が前の全置換と実際の置き換えで異なっている場合には，この実際の置き換えによって変化のあった ε-項のうちで最低の次数を持つものに対して，この変化は，0-置換の数表記による置き換えにより起こっている．

上のような状況にを明確に表すための表現を導入しておく．おのおのの全置換に対し，それの“インデックス”として $\mathfrak{p}$ 個の数の列を対応させる．ここに $\mathfrak{p}$ は，与えられた論理式の列の中に現れる ε-項の次数のうち最高のものである．この数の列の中の $\mathfrak{q}$ 番目の数（$\mathfrak{q} = 1,\ldots,\mathfrak{p}$）は，次数 $\mathfrak{q}$ の ε-項で，その全置換により，0-置換と異なる実際の置き換えの施されているものの数である．2つのインデックスのうち，これらのインデックスの間で異なる数が現れる最初の場所で大きな数を持っているもののほうを，より“高い”ものと呼ぶことにする．これにより，主張 3. は次のように述べられる:

4. 2つの全置換で実際の置き換えの異なるもののうち，後のほうのものが，より高いインデックスを持つ．

5. $\mathfrak{n}_\mathfrak{q}$（$\mathfrak{q} = 1,\ldots,\mathfrak{p}$）を与えられた論理式の列の中に現れる互いに異なる次数 $\mathfrak{q}$ の ε-項の数とすれば，ここで問題となりうる全置換のインデックスの数は

$$(\mathfrak{n}_1 + 1) \cdot \cdots \cdot (\mathfrak{n}_\mathfrak{p} + 1)$$

---

[70] 162 ページ参照．

である．おのおのの次数 $\mathfrak{q}$ に対し，次数 $\mathfrak{q}$ の ε-項で 0-置換と異なる実際の置き換えを持つものの数は，0 から $\mathfrak{n}_\mathfrak{q}$ までの数のどれかであるからである．

6. 1 つ以上の例証置換によるある全置換から，もう 1 つの全置換への移行において，少なくとも 1 つの ε-項の実際の置き換えは変化を受ける．

$\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_\mathfrak{n})$ を問題点となる論理式の 1 つが属す ε-項で，前の全置換から次の全置換を形成する際に，例証置換を提供するものとする．$\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, 1, \ldots, a_\mathfrak{n})$ をこの ε-項の基本タイプとして，$\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_\mathfrak{n}$ を，項 $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_\mathfrak{n}$ のここでの例証置換を求める際の値とする．このとき，次のどれかが起こる: 項 $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_\mathfrak{n}$ は，新しい全置換で，再び，$\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_\mathfrak{n}$ という値を得る．この場合には，この全置換で，$\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_\mathfrak{n})$ の実際の置き換えにおいて，$\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_\mathfrak{n})$ のこの基本タイプに対する変更された置換関数でのパラメータの組 $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_\mathfrak{n}$ に対する新しい関数値が用いられている．したがって，項 $\varepsilon_\mathfrak{x}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_\mathfrak{n})$ は，新しい全置換への移行において変化を受ける．そうでない場合には，項 $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_\mathfrak{n}$ のうち少なくとも 1 つは，新しい全置換で前と違う新しい値を得ている．この場合には，このような項に現れる ε-項のうち，少なくとも 1 つの項の実際の置き換えは変化を受けていなければならない．

主張 4. と 6. から，全置換を生成してゆく我々の方法において，全てのレゾルベントでないような全置換には，それより高いインデックスを持つ全置換が続くことがわかる．したがって，5. により，遅くとも，$((\mathfrak{n}_1 + 1) \cdot \cdots \cdot (\mathfrak{n}_\mathfrak{p} + 1))$ 番目の全置換はレゾルベントにならなければならない．

これにより，与えられた論理式の列の中に現れる ε-項が全て階数 1 である場合に対するレゾルベントの確定の方法が得られた．ここで得られた必要となる全置換の数の評価から，評価は荒くなるが，与えられた論理式の列に現れる互いに異なる ε-項の総数

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 + \cdots + \mathfrak{n}_\mathfrak{p}$$

のみに依存するもう少し簡単なものを得ることができる．つまり，任意の数 $\mathfrak{z}$ に対し

$$\mathfrak{z} + 1 \leq 2^\mathfrak{z}$$

という関係が成り立つことに留意すると，

$$\begin{aligned}(\mathfrak{n}_1+1)\cdot\cdots\cdot(\mathfrak{n}_\mathfrak{p}+1) &\le 2^{\mathfrak{n}_1}\cdot\cdots\cdot 2^{\mathfrak{n}_\mathfrak{p}}\\ &\le 2^{\mathfrak{n}_1+\cdots+\mathfrak{n}_\mathfrak{p}}\\ &= 2^{\mathfrak{n}}\end{aligned}$$

が得られる．したがって，必要となる全置換の数は，$\mathfrak{n}$ を与えられた論理式の列に現れる互いに異なる ε-項の総数として，$2^{\mathfrak{n}}$ 以下となることがわかる．

実は，この結果のためには，基本タイプによる関数置換の方法は，考察の助けになったとしても，必ずしも必要ではない．ε-項，および問題点となる論理式の階数が 1 より大きい一般の場合の考察において，初めてこの手法が本質的に使われることになる．

d) 一般の場合における全置換の列の構成．　一般の場合の取り扱いのために，再び，レゾルベントの性質を持つような全置換が最後に得られた場合のみに停止するような全置換の列の構成法を得ることを試みる．置き換えの実行においては，高い階数を持った基本タイプへの置き換えは階数 1 の基本タイプへの置き換えに帰着されるのであったから，全置換の生成を帰納的に行って，階数 $\mathfrak{m}+1$ までの ε-項の全体の集合の取り扱いを，階数が $\mathfrak{m}$ 以下の ε-項の集合の取り扱いに帰着させるというのが自然な方針であろう．

与えられた問題点となる論理式と ε-同等性論理式の列の中に現れる ε-項の階数で最高のものを略して，この**論理式の列の階数**と呼ぶことにする．階数 1 の論理式の列については，0-置換のみの全置換から出発して，レゾルベントに到達するまで全置換を繰り返すための手続きがすでに得られていた．この際に用いられた置き換え関数は，たかだか有限個のパラメータの値の組において 0 と異なる値をとるようなもののみであった[71]．このすでに得られている手続きから，同様なことが高い階数の論理式の列に対しても行えるような手続きを得るためには，次のような事実が必要になる: 任意の階数を持つ与えられた論理式の列において，そこに現れる階数 1 の ε-表現の基本タイプに対し置き換えが選ばれ，これらを（そこで選ばれた置き換え関数の記号によって）1 より高い階数の問題点となる論理式と ε-同等性論理式に記号として記入することにより，これらの論理式は再び同じ種類の論理式に移行し，この際に階数は 1 つ下がる．

---

[71] 165–167 ページおよび 172 ページ参照．

なぜなら，基本タイプへの置き換えにおいて，そのパラメータの代入場所が（それが存在する場合には）保存されることと，以前に考察したような[72]，ある項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ に現れる ε-表現と対応する論理式 $\mathfrak{A}(c)$ に現れる ε-表現の関係により，問題点となる論理式と ε-同等性論理式の特徴的な形態は保存されるが，さらに，ε-項の階数が 2 以上のものについては，階数 1 の基本タイプへの置き換えにより，その階数が 1 つ下がることも，階数の定義[73]から容易にわかるからである．

これにより，与えられた論理式の列が階数 $\mathfrak{m}+1$ のとき，階数が 1 より大きい問題点となる論理式と ε-同等性論理式に階数 1 の基本タイプの置き換えを記号として記入することにより，$\mathfrak{m}$ 以下の階数の問題点となる論理式と ε-同等性論理式の列が得られることになる．

今，階数 $\mathfrak{m}$ の論理式の列に対し，0-値のみの全置換から出発して，レゾルベントが求まるまで，次々に全置換を生成する手続きが得られたと仮定してみよう．そのような手続きから，次のようにして，与えられた階数 $\mathfrak{m}+1$ の論理式の列 $\mathfrak{R}$ に対する同様の手続きを得ることができる．

まず，階数 1 の基本タイプに対し，0-値のみの置き換えを選ぶ．これを，階数が 1 より大きい問題点となる論理式と ε-同等性論理式に記号として記入する．これにより，階数 $\mathfrak{m}$ の論理式の列 $\mathfrak{R}_1$ が得られる．この論理式の列に対し，上で仮定した全置換の列の生成の手続きを適用する．論理式の列 $\mathfrak{R}_1$ の基本タイプに対する全置換は，論理式の列 $\mathfrak{R}$ での階数 1 の基本タイプの全置換との組み合わせにより，$\mathfrak{R}$ の全置換を与える．階数が 2 以上の基本タイプの置き換えは，対応する $\mathfrak{R}_1$ での基本タイプの置き換えに，それの下位にあるおのおのの ε-表現の置き換えを書き込むことによって得られるからである．これにより，論理式の列 $\mathfrak{R}$ に対する全置換の列

$$E_{11}, E_{12}, \ldots$$

が得られる．これはやがて停止するが，これは，論理式の列 $\mathfrak{R}_1$ での全置換の生成において，レゾルベントが得られた場合に限る．このとき，対応する $\mathfrak{R}$ の全置換もレゾルベントになっている場合には，全体の手続きも終了する．そうでない場合には，$\mathfrak{R}$ に属す問題点となる論理式の少なくとも 1 つが，このレゾ

---

[72] 153 ページ参照．

[73] 71 ページ参照．

ルベントに対応する全置換 $E_{1\mathfrak{k}_1}$ において偽の論理式に移行する．そのような論理式は，階数 1 を持つものでなければならない．なぜなら，全置換 $E_{1\mathfrak{k}_1}$ は $\mathfrak{R}_1$ のレゾルベントから得られたものになっており，したがって，1 より高い階数を持つ問題となる論理式はこれにより真の論理式となるからである．一方，階数 1 の基本タイプの置き換えは 0-値のみのものであったから，階数 1 の問題点となる論理式のうち，第 2 種のものは偽にならない．よって，少なくとも 1 つの

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))$$

という形の階数 1 の第 1 種の問題点となる論理式が全置換 $E_{1\mathfrak{k}_1}$ で偽の論理式に移行する．この論理式の評価において，一般には，階数が 2 以上の基本タイプの置き換えが用いられる．しかし，この問題点となる論理式の階数は 1 であるから，そのような置き換えは，$\mathfrak{A}(c)$ に現れる ε-項の値の確定に用いられるのみである．したがって，階数 1 の ε-項のみが現れる場合とまったく同様に，このような全置換 $E_{1\mathfrak{k}_1}$ で偽の論理式になるような階数 1 の問題点となる論理式に対し，例証置換を得ることができ，さらに最小置換が得られる．この最小置換を，今度は，上の問題となる論理式の属す ε-項の基本タイプの新しい置き換えとして用いることができる．

つまり，階数 1 の基本タイプの置き換えが 0-値のみの置き換えであったものを，上で求められた最小置換から得られる数表記あるいは関数の値で変更することによって，新しい置き換えを構成する．この変更された置き換えを，階数が 1 より高い問題点となる論理式と ε-同等性論理式に記入することにより，階数 $\mathfrak{m}$ の論理式の列 $\mathfrak{R}_2$ を得る．$\mathfrak{R}_2$ には再び全置換の列の構成の手続きを適用することができ，それにより得られた $\mathfrak{R}_2$ でのおのおのの置き換えを階数 1 の基本タイプの置き換えと組み合わせることにより，$\mathfrak{R}$ での全置換が得られる．これにより，$\mathfrak{R}$ の全置換の列

$$E_{21}, E_{22}, \ldots$$

が得られる．

これが停止するのは，論理式の列 $\mathfrak{R}_2$ のレゾルベントが得られたときである．これに対応する $\mathfrak{R}$ の全置換が，やはりレゾルベントである場合には我々の全体の手続きが終了する．そうでなければ，$\mathfrak{R}_2$ のレゾルベントに対応する $\mathfrak{R}$ の

全置換 $E_{2\mathfrak{k}_2}$ において，少なくとも1つの階数 1 の第1種の問題点となる論理式が偽の論理式とならなくてはならない．なぜなら，第2種の問題点となる論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}) \to \varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \neq \mathfrak{k}'$$

では，項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ は，この全置換で値 0 を持つか，最小置換——$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ が基本タイプで，これ自身に対する最小置換か，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ からそこに現れるその基本タイプのパラメータに全置換によって確定する値を代入したものに対する最小置換——によって得られた値を持つかのいずれかであり，第2種の論理式は，いずれにしても真の論理式に移行することになるからである．したがって，再び，少なくとも1つの第1種の問題点となる論理式で階数 1 のものが，この全置換によって偽の論理式になっており，これにより，1つ以上の例証置換が得られ，さらに，最小置換が得られ，階数 1 の基本タイプの置き換えで，0 と異なる数表記置換または関数置換が得られる．

これらの数表記，または，関数の値を前の 0-値の代わりにとることにより，階数 1 の基本タイプに対する新しい置き換えを得ることができる．この置き換えを，階数が 1 より高い問題点となる論理式と ε-同等性論理式に記入することにより，これらの論理式から，階数 $\mathfrak{m}$ の論理式の列 $\mathfrak{R}_3$ が得られる．これに対し，再び全置換の列の生成の手続きを適用することができる．その際に得られる $\mathfrak{R}_3$ に対する全置換のおのおのから，$\mathfrak{R}$ の全置換が得られる．これにより，$\mathfrak{R}$ に対する全置換の列

$$E_{31}, E_{32}, \ldots$$

が得られる．これが停止するのは，$\mathfrak{R}_3$ のレゾルベントが得られたときに限る．このレゾルベントに対応する $\mathfrak{R}$ の全置換が $\mathfrak{R}$ のレゾルベントなら，我々の全体の手続きは終了するが，そうでなければ，この全置換において，ある階数 1 の問題点となる論理式が偽になるが，これは第1種のものでなければならない．したがって，再び，例証置換と最小置換がつくれて，これから階数 1 の基本タイプに対する新しい置き換えが得られる．

このようにして，レゾルベントが得られなければ，この手続きを無限に続けることができる．よって，階数 $\mathfrak{m}$ の論理式の列に対する全置換生成手続きで仮定したような性質を持つものから，階数 $\mathfrak{m}+1$ の論理式の列に対し同様の性質

を持つ手続きを得ることができる．これから，帰納的に任意の階数の論理式の列に対する同様の手続きが得られることになる．

特に，この手続きでは，1つの全置換から次の全置換へ移行する際の，1つの基本タイプに対しての変更は，0-置換の代わりに他の数表記置換が現れるか，関数置換の場合には，置き換え関数が幾つかの（有限個の）パラメータの値の組に対して，0と異なる関数値を得るという点のみである．

注意． 与えられた関数の列 $\mathfrak{R}$ が階数2の場合には，論理式の列 $\mathfrak{R}_1$，$\mathfrak{R}_2$，... は，それぞれ階数1となる．したがって，これらの論理式の列のレゾルベントは，関数置換の方法を用いずに，つまり，数表記置換のみのものとなる．よって，この場合には，手続きの別の部分をまったく変更することなく，基本タイプの使用を階数1の ε-表現の置き換えに制限できる．特に，そこに現れる階数2の ε-項の次数が1の場合には，論理式の列 $\mathfrak{R}_1$，$\mathfrak{R}_2$，... のレゾルベントは，初めに考察したような直接的な方法により得ることができる．

e) 問題点となる論理式が全て第1種である場合のレゾルベントの構成の可能性の証拠． 上に述べた全置換の列の生成の手続きのみでは，我々の目標が達成されたことにはならない．重要な課題として，さらにこの手続きが停止することを示さなければならない．これは，しかし，一般の場合には示すことができず，示せるのは，考察の対象となる論理式の列に現れる第2種の問題点となる論理式が，全て階数1を持つ場合のみである．

この仮定のもとに証明を行うために，初めに，考察している論理式の列の中の問題点となる論理式が全て第1種のものであるという，それよりもう少し強い仮定をすることにする．この仮定により，全置換の構成の手続きの際に，例証置換から最小置換に移行する手間を省いて，新しくつくられる全置換に，例証置換を直接用いることができるようになる．実際，このような，簡略化された全置換の構成法では，初めに評価することができる階数の全置換の繰り返しの回数内で，レゾルベントの得られることが示せる．

評価は，帰納的な方法により確定される．すでにみたように[74]，階数1の論理式の列については，そこでレゾルベントに至るまでに必要となる全置換の数は，n をこの論理式の列の中に現れる互いに異なる ε-項の数として，たかだか 2^n となるのであった．

---

[74]168 ページ参照．

今，ある階数 $\mathfrak{m}$ に対し，階数 $\mathfrak{m}$ の論理式の列で第 1 種の問題点となる論理式と，ε-同等性論理式からなるもので，そこに現れる互いに異なる ε-項の数が $\mathfrak{n}$ 以下のものに対して，我々の簡略化された全置換の生成の手続き，つまり例証置換の直接利用によるものによって，レゾルベントに到達するまでに必要となる全置換の最高数の評価 $\psi(\mathfrak{n})$ が得られていると仮定しよう．この仮定のもとに，階数 $\mathfrak{m}+1$ の論理式の列に対する評価が得られればよい．

$\mathfrak{R}$ を，このような第 1 種の問題点となる論理式と，ε-同等性論理式からなる階数 $\mathfrak{m}+1$ の論理式の列で，そこに現れる互いに異なる ε-項の数は，$\mathfrak{n}$ 以下であるとしよう．これに対し，前に述べたようなやり方で，全置換の列

$$\begin{matrix} E_{11}, & E_{12},\ldots, E_{1\mathfrak{k}_1} \\ E_{21}, & E_{22},\ldots, E_{2\mathfrak{k}_2} \\ \vdots & \vdots \end{matrix}$$

をつくる．この際，全ての箇所で，例証置換から最小置換への移行を省略する．

おのおのの全置換 $E_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ （$\mathfrak{r}=1,\ 2,\ldots,\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}$）は 2 つの“部分置換”からなる．階数 1 の $\mathfrak{R}$ の基本タイプへの置き換えと，残りの基本タイプに対するものである．最初の部分置換“$E_{\mathfrak{p}}$”は，全ての全置換 $E_{\mathfrak{p}1}$，$E_{\mathfrak{p}2},\ldots,E_{\mathfrak{p}\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}}$ に対し共通である．部分置換 $E_{\mathfrak{p}}$ の階数が 1 より高い問題点となる論理式と ε-同等性論理式への記入により，$\mathfrak{R}$ から階数 $\mathfrak{m}$ の論理式の列 $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$ が得られる．$E_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ の後半の部分置換——これを“$E^{*}_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$”と呼ぶことにする——は，階数の 1 より高い基本タイプへの置き換えからなり，$\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$ の基本タイプの全置換——これを“$E'_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$”と呼ぶことにする——から得られたものとなっている．

全置換 $E'_{\mathfrak{p}1}$，$E'_{\mathfrak{p}2}$，... は，我々の全置換の列の生成の手続きを $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$ に適用することにより得られている．$\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$ は階数 $\mathfrak{m}$ で，ここに現れる互いに異なる ε-項の数は $\mathfrak{n}$ 以下だから，我々の仮定により，この全置換の列は，遅くとも $\psi(\mathfrak{n})$ 番目の全置換で停止して，このときの全置換はレゾルベントとなっている．したがって，

$$\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}} \leq \psi(\mathfrak{n})$$

という評価が得られる．

ここで，我々の求めている全体として必要な全置換の数の評価を得るためには，部分置換 $E_{\mathfrak{p}}$ （$\mathfrak{p}=1,\ 2,\ \ldots$）の数の上限が求まればよい．ここで以下の事実に注意しよう:

1. $\mathfrak{R}$ の問題点となる論理式と ε-同等性論理式で，階数が 1 より高いのものに部分置換 $E^*_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ を記号列として記入すれば，同種の論理式の列で階数が 1 のものが得られる．これを "$\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$" で表すことにする．部分置換 $E_{\mathfrak{p}}$ は $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ の全置換となる．

2. 部分置換 $E^*_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ と $E^*_{\mathfrak{q}\mathfrak{r}}$ が等しいときには，論理式の列 $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ と $\mathfrak{R}_{\mathfrak{q}\mathfrak{r}}$ も等しい．特に，部分置換 $E^*_{\mathfrak{p}1}$ ($\mathfrak{p} = 1, 2, \ldots$) は 0-値のみのものであったから，論理式の列 $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}1}$ ($\mathfrak{p} = 1, 2, \ldots$) は全て $\mathfrak{R}_1 1$ と等しいものになることがわかる．

3. 部分置換 E_1 は 0-値のみのものである．もし，$E_{\mathfrak{p}}$ が $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}}$ のレゾルベントとなっていれば，全置換 $E_{\mathfrak{p}\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}}$ は $\mathfrak{R}$ のレゾルベントとなるか，そうでなければ，$E_{\mathfrak{p}}$ とは異なる部分置換 $E_{\mathfrak{p}+1}$ が得られる．さらに，これの $E_{\mathfrak{p}}$ との違いは，$E_{\mathfrak{p}}$ で数表記，あるいは置き換え関数の値として現れるある 0-値が他の値に変えられている点である．

4. ある部分置換 $E_{\mathfrak{p}}$ に関して，論理式の列 $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ は，(1. により) 全置換の列となっているから，前と同様に[75] $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ に現れる次数ごとに，0-置換でない置き換えを受ける ε-項で，その階数を持つものの数を順に並べたものとしての "インデックス" を定義することができる．

$\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ が $\mathfrak{R}_{\mathfrak{q}\mathfrak{r}}$ と等しい論理式の列で $\mathfrak{p} < \mathfrak{q}$ のとき，これらの論理式の列に対し $E_{\mathfrak{p}}$ と $E_{\mathfrak{q}}$ を生成する実際の置き換えが等しいか，または，$E_{\mathfrak{q}}$ はこれらの論理式の列に関して $E_{\mathfrak{p}}$ より高いインデックスを持つかのいずれかである．これは，上記の主張 3. の後半から導かれる．ここでの考察は，前に階数 1 の論理式の列に対して行ったときのものとまったく同様である[76]．

5. 部分置換 $E^*_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{r}}$, $E^*_{\mathfrak{p}_2\mathfrak{r}}, \ldots, E^*_{\mathfrak{p}_s\mathfrak{r}}$ が等しいなら，全置換 $E_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{r}}$, $E_{\mathfrak{p}_2\mathfrak{r}}, \ldots, E_{\mathfrak{p}_s\mathfrak{r}}$ のうち，ε-項の**実際の置き換えに関して**，異なるものの数は多くても $2^{\mathfrak{n}}$ である．

なぜなら，この前提条件により，$\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{r}}$ は $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_2\mathfrak{r}}, \ldots, \mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_s}$ と等しくなる．この論理式の列に含まれる，互いに異なる ε-項の数は，それぞれ $\mathfrak{n}$ 以下で，$E_{\mathfrak{p}_1}, \ldots, E_{\mathfrak{p}_s}$ はこれに対する全置換となっている．これらの全置換に対するインデックスは $2^{\mathfrak{n}}$ 以上はない．したがって，主張 4. により，$E_{\mathfrak{p}_1}, \ldots, E_{\mathfrak{p}_s}$ のうち，論理式の列 $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{r}}$ に対する実際の置き換えで異なるものは $2^{\mathfrak{n}}$ 個以下でなければない．ここで，一般に，$\mathfrak{R}$ の ε-項に対する全置換 $E_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ から生成される実際の

---

[75] 167 ページ参照．

[76] 167 ページ参照．

置き換えは，部分置換 $E^*_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ と $E_{\mathfrak{p}}$ が $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ にもたらす実際の置き換えとの組み合わせによって確定することに注意すると，上の主張が得られる．

6. 全置換 $E_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$，$E_{\mathfrak{q}\mathfrak{r}}$ が，実際の置き換えおよび部分置換 $E^*_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$，$E^*_{\mathfrak{q}\mathfrak{r}}$ に関して等しく，$\mathfrak{r} < \mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}$ なら $\mathfrak{r} < \mathfrak{k}_{\mathfrak{q}}$ となり，このときには，$E^*_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}+1}$ も $E^*_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}+1}$ と等しくなる．また，$\mathfrak{r} = \mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}$ なら $\mathfrak{r} = \mathfrak{k}_{\mathfrak{q}}$ である．

なぜなら，$\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$，$\mathfrak{R}_{\mathfrak{q}}$ の同一の論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))$$

から，部分置換 $E_{\mathfrak{p}}$，$E_{\mathfrak{q}}$ により得られる任意の 2 つの問題点となる論理式を考えると，これらは，

$$\mathfrak{A}_1(\mathfrak{k}_1) \to \mathfrak{A}_1(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}_1(\mathfrak{x})), \qquad \mathfrak{A}_2(\mathfrak{k}_2) \to \mathfrak{A}_2(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}_2(\mathfrak{x}))$$

という形をしている．全置換 $E_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$，$E_{\mathfrak{q}\mathfrak{r}}$ は実際の置換に関して等しいから，1 番目の論理式が $E'_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ により得る真偽値と，2 番目の論理式が $E'_{\mathfrak{q}\mathfrak{r}}$ により得る真偽値とは等しい．同様に，$\mathfrak{k}_1$ が $E'_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ により得る値は $\mathfrak{k}_2$ が $E'_{\mathfrak{q}\mathfrak{r}}$ により得る値と等しくなる．$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}_1(\mathfrak{x})$ の基本タイプがパラメータを持つ場合には，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}_2(\mathfrak{x})$ の基本タイプも同じ数のパラメータを持ち，1 番目の基本タイプのおのおののパラメータは $E'_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ により得る値は，2 番目の基本タイプの対応するパラメータが $E'_{\mathfrak{q}\mathfrak{r}}$ により得るものと等しい．したがって，1 番目の論理式から，全置換 $E'_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ により，例証置換が得られたときには，2 番目のものからも，全置換 $E'\mathfrak{q}\mathfrak{r}$ により，同じ例証置換が得られることになる．

この関係は，全ての問題点となる論理式の対で，上のような対応をしているものに対して成り立つから，$E'_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ が $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$ のレゾルベントとなるのは，$E'_{\mathfrak{q}\mathfrak{r}}$ が $\mathfrak{R}_{\mathfrak{q}}$ のレゾルベントとなる，ちょうどそのときに限ることがわかる．さらに，$E'_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ と $E'_{\mathfrak{q}\mathfrak{r}}$ がレゾルベントでないときには，$E'_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ から $E'_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}+1}$ への移行において，新しく現れる 0 と異なる数表記置換または関数置換の値は，$E'_{\mathfrak{q}\mathfrak{r}}$ から $E'_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}+1}$ への移行において現れるものと等しい．したがって，仮定により $E^*_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ と $E^*_{\mathfrak{q}\mathfrak{r}}$ は等しいのであったから，この場合には $E^*_{\mathfrak{p},\mathfrak{r}+1}$ と $E^*_{\mathfrak{q},\mathfrak{r}+1}$ も等しくなる．

7. 部分置換 $E^*_{\mathfrak{p}\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}}$ が $E^*_{\mathfrak{q}\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}}$ と等しく，$\mathfrak{p} < \mathfrak{q}$ のとき，全置換 $E_{\mathfrak{p}\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}}$ と $E_{\mathfrak{q}\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}}$ は，実際の置き換えに関して等しくない．なぜなら，部分置換 $E_{\mathfrak{q}}$ （$\mathfrak{q} > \mathfrak{p}$）では，全置換 $E_{\mathfrak{p}\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}}$ により生じた，階数 1 の問題点となる論理式から得られる例証置換が用いられているからである．したがって，仮定により，論理式の列 $\mathfrak{R}_{\mathfrak{q}\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}}$ は

$\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}\mathfrak{k}_\mathfrak{p}}$ と等しいから，$E_\mathfrak{q}$ を，この論理式の列に施したとき，そのような（$E_\mathfrak{p}$ の $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}\mathfrak{f}_\mathfrak{p}}$ への適用のところで初めて得られている）例証置換が実際の置き換えにおいて，直接に，この例証置換の得られた ε-項の置き換えで，あるいは，ある ε-項のパラメータとして用いられた項の変化として用いられることになる[77].

さて，主張 1.–7. を互いに異なる部分置換 $E_\mathfrak{p}$ の数の評価，したがって，全置換 $E_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ の数の評価に適用しよう．表現を容易にするために，次のような用語を導入する:

前に全置換を図式として並べたものの行と列に対応して，"置換行" "置換列" といういい方をすることにする．つまり，全置換の $\mathfrak{p}$ 番目の置換行は，全置換の列 $E_{\mathfrak{p}1}$，$E_{\mathfrak{p}2}$，... で，全置換の $\mathfrak{r}$ 番目の置換列は $E_{1\mathfrak{r}}$，$E_{2\mathfrak{r}}$，... である．さらに，幾つかの全置換は，それらにより得られた実際の置き換えが互いに等しいとき，"実際として等しい" といい，得られた実際の置き換えが互いに異なるとき，"実際として異なる" ということにする．

2 つの置換行，例えば，$\mathfrak{p}$ 番目と $\mathfrak{q}$ 番目のものは，1 から $\mathfrak{r}$ までの全ての数 $\mathfrak{s}$ に対し，部分置換 $E^*_{\mathfrak{p}\mathfrak{s}}$，$E^*_{\mathfrak{q}\mathfrak{s}}$ が等しく，全置換 $E_{\mathfrak{p}\mathfrak{s}}$，$E_{\mathfrak{q}\mathfrak{s}}$ が実際として等しいか，両方の行ともすでに $\mathfrak{s}$ 番目の列で終わっているような場合に，"$\mathfrak{r}$-重に類似" しているという．

さて，置換行の生成を $\mathfrak{l}$ 行まで行ったとしよう．このとき，全置換の図式で各列にはたかだか $\mathfrak{l}$ 個の，また，各列にはたかだか $\psi(\mathfrak{n})$ 個の全置換が並んでいる．

以下のようにして $\mathfrak{l}$ の評価ができる: まず，4. と 5. により，部分置換 E^*_{11}，$E^*_{21},\ldots,E^*_{\mathfrak{l}1}$ は等しいから，最初の置換列には，たかだか $2^\mathfrak{n}$ 個の実際として等しい全置換しか現れない．また，全置換の列 E_{11}，$E_{21},\ldots,E_{\mathfrak{l}1}$ の 2 つの実際として等しい全置換の間に，それらと実際として異なる全置換がくることはありえない．したがって，1 番目の置換列は，たかだか $2^\mathfrak{n}$ 個の，その中の全置換は実際として等しくなっているようなブロックに分割される．$E_{\mathfrak{p}1}$ と $E_{\mathfrak{q}1}$ が実際として等しい場合には，$\mathfrak{p}$ 番目と $\mathfrak{q}$ 番目の行は 1-重に類似しているから，置換列の全体は，たかだか $2^\mathfrak{n}$ 個の，その中では置換行は互いに 1-重に類似しているようなブロックに分割される．

さらに，6. により，$\mathfrak{p}$ 番目から $\mathfrak{q}$ 番目まで（$\mathfrak{p} < \mathfrak{q}$）の置換行が $\mathfrak{r}$-重に類似

[77] 168 ページにおける対応する議論を参照．

している場合には，これらの置換行は，全て $\mathfrak{r}+1$ 番目の列より前で終止するか，つまり，この場合を含めて，これらの置換行の全てが $(\mathfrak{r}+1)$-重に類似しているか，あるいは，$\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{q}$ との間の全ての行番号 $\mathfrak{s}$ に対し部分置換 $E^*_{\mathfrak{s},\mathfrak{r}+1}$ が等しく，したがって，対応する論理式の列 $\mathfrak{R}_{\mathfrak{s},\mathfrak{r}+1}$ が全て等しいかのいずれかである．

このことから，以下のような論証ができることになる: すでにみたように，$\mathfrak{l}$ 個の置換行の列は，たかだか $2^{\mathfrak{n}}$ 個の，そのおのおのに含まれる置換行は互いに 1-重に類似しているようなブロックに分割される．そのようなブロックのおのおのは，さらに，たかだか $2^{\mathfrak{n}}$ 個の，そのおのおのに含まれる置換行は互いに 2-重に類似しているようなブロックに分割され，これらのブロックのそれぞれは，たかだか $2^{\mathfrak{n}}$ 個の，そのおのおのに含まれる置換行は互いに 3-重に類似しているようなブロックに分割される．

このように続けてゆくことにより，これらの行の列は，たかだか $(2^{\mathfrak{n}})^{\psi(\mathfrak{n})}$ 個のブロックで，それぞれのブロック内の置換行は互いに $\psi(\mathfrak{n})$-重に類似しているようなものに分割されることがわかる．ところが，$\psi(\mathfrak{n})$-重に類似しているような異なる行はありえない．$\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{q}$ を異なる行番号で，$\mathfrak{p}<\mathfrak{q}$ となっているものとすれば，7. により，$\mathfrak{p}$ 番目の置換行と $\mathfrak{q}$ 番目の置換行は，$\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}$-重に類似していることはありえない．したがって，$\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}} \leq \psi(\mathfrak{n})$ だったから，これらの行は $\psi(\mathfrak{n})$-重には類似していないことがわかる．

これにより，我々の考察していた置き換え行列は，たかだか $(2^{\mathfrak{n}})^{\psi(\mathfrak{n})}$ の置換行しか含まないことがわかった．つまり，

$$\mathfrak{l} \leq 2^{\mathfrak{n}\cdot\psi(\mathfrak{n})}$$

となっている．したがって，全体として我々の全置換の列の生成の手続きにおいては，たかだか

$$2^{\mathfrak{n}\cdot\psi(\mathfrak{n})}\cdot\psi(\mathfrak{n})$$

個の全置換しか生成されない．つまり，遅くとも $2^{\mathfrak{n}\cdot\psi(\mathfrak{n})}\cdot\psi(\mathfrak{n})$ 回目の全置換はレゾルベントとなっている．

この評価が，階数 $\mathfrak{m}+1$ の論理式の列に適用できるのは，階数 $\mathfrak{m}$ の論理式の列について $\psi(\mathfrak{n})$ がすでに求められている場合に限る．階数が 1 の論理式の場合には，我々はすでに評価関数 $2^{\mathfrak{n}}$ を得ていたから，これにより，帰納的に階

数 $\mathfrak{m}$ の論理式の列で，第 1 種の問題点となる論理式と ε-同等性論理式からなるようなもので，たかだか $\mathfrak{n}$ 個の互いに異なる ε-項を持つもののレゾルベントを得るために必要となる全置換の数の評価関数 $\psi(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ を得ることができ，これを次のよう定義できる:

$$\psi(1, \mathfrak{n}) = 2^{\mathfrak{n}}$$
$$\psi(\mathfrak{m} + 1, \mathfrak{n}) = 2^{\mathfrak{n} \cdot \psi(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})} \cdot \psi(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}).$$

この帰納等式は，原始帰納の形をしている．

f) 任意の階数の第 2 種の問題点となる論理式を含めた場合における手法の応用の不可能性．前出の結果に対する補足． 前の節で行った論証により，与えられた第 1 種の問題点となる論理式と ε-同等性論理式の列に対して，レゾルベントを見いだせることの可能性が示された．そこでみたように，階数が 1 より大きい論理式の列の取り扱いには，ヒルベルトの証明方針での基本的なアイデア以外にも別の証明法が必要であった．ここで用いられた証明法は，アッカーマン (W. Ackermann) によるものである[78]．これとは別の，しかし，やはりヒルベルトの証明方針による方法により，フォン・ノイマン (J. von Neumann) も同様の結果を得ている[79]．

当初はこの証明法により，第 2 種の問題点となる論理式を含めた場合も，容易に扱えるように思われた．実際に，このような拡張を行おうとするときに現れる障害は，相当に目につきにくい場所に隠されていたのである．

特に，先に述べた証明では，全置換の列の生成による手続きの際，第 2 種の問題点となる論理式は，問題なく取り扱えるようになっていて，手続きが停止することを示す段階で初めて，考察している論理式の列に第 2 種の問題点とな

[78] ここでの証明は，アッカーマンの書簡の中で示されたもので，これは，彼の博士論文 “Begründung des, tertium non datur' mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit”, *Math. Ann.* Bd.93 (1924) での証明を精密化，および簡略化したものとなっている．

[79] Neumann, J. v.:“Zur Hilbertschen Beweistheorie”, *Math. Z.* Bd.26 (1927)．時間的には，このノイマンによる証明のほうが，ここで記述したアッカーマンの証明より先である．また，すでに述べたように，この論文で初めて，(ここでの定義とは少し異なる) 基本タイプの概念が導入された．

る論理式が含まれていないという条件を導入したのであった[80]．この条件により，全置換の生成の手続きの際に，例証置換から最小置換への移行が省略できるようになった．

この簡略化が証明のどこで本質的に用いられているのかをみてみよう．この簡略化により，全置換が具体的にどのようなものになっているかが決まり，これが主張 1.–7. に反映していたのであった．これらの主張のうち，1.–5. と 7. は例証置換を直接に用いるか，あるいは最小置換を経由して用いるかにまったく依存しない．主張 1.–3. に対しては，これはただちにみてとれる．これに対し，4., 5. および 7. は，その前で第 2 種の問題点となる論理式をすでに含めて行ったのと同様の[81]階数 1 の論理式の列の全置換に対する考察から導くことができる．

例証置換と最小置換の違いが大きく出てくる唯一の箇所は，6. の根拠を示したところであった．ここで，以下のような論法が用いられた: 2 つの問題となる論理式で，同一の階数が 1 より大きい問題点となる論理式から，2 つの異なる部分置換 $E_{\mathfrak{p}}$，$E_{\mathfrak{q}}$ の記入により生じたものが与えられていて，$E_{\mathfrak{p}}$ と $E'_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ から生じる全置換と $E_{\mathfrak{q}}$ と $E'_{\mathfrak{q}\mathfrak{r}}$ から生じる全置換とが実際として等しいとき，1 番目の問題点となる論理式から，全置換 $E'_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ によって得られた例証置換は，2 番目の問題点となる論理式から，全置換 $E'_{\mathfrak{q}\mathfrak{r}}$ によって得られた例証置換と**同じ数表記の値を持つ．**

ここで，対応する例証置換の数表記の値の一致は，全置換 $E_{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}$ と $E_{\mathfrak{q}\mathfrak{r}}$ が実際として等しいという事実に基づいている．ところが，同じ理由から，これらの例証置換に属す最小置換が同じ数表記の値を持つということを帰結することはできない．むしろ，異なる実際として等しい全置換で同一の ε-項の例証置換 $\mathfrak{z}$ から，異なる最小置換が出てくる可能性がある．その可能な総数はたかだか $\mathfrak{z}$ だとしてもである．

したがって，第 2 種の問題点となる論理式が含まれる場合には，$\mathfrak{r}$-重に類似している置換行の列が常に $2^{\mathfrak{n}}$ 個の，$(\mathfrak{r}+1)$-重に類似した置換行のブロックに分割されるということを結論することができなくなってしまい，むしろ，そのようなブロックの数は，問題としている置換列の $\mathfrak{r}$ 番目の全置換から $\mathfrak{r}+1$ 番目の全置換への移行の際に用いられる例証置換の数表記による値に依存して決

[80] 173 ページ参照．

[81] これは，該当する箇所ですでに注意した．

まる可能性がある．

このような状況は，フォン・ノイマンによる次の例によって示されている：$\mathfrak{z}$ を 0 とも 0′ とも異なる任意の数表記として，$\mathfrak{C}(a)$ を論理式

$$\varepsilon_y(a' = y) = 0 \to a = \mathfrak{z}$$

とする．さらに，$\mathfrak{e}$ を ε-項 $\varepsilon_x \mathfrak{C}(x)$ とする．つまり，

$$\varepsilon_x(\varepsilon_y(x' = y) = 0 \to x = \mathfrak{z})$$

である．考察する論理式の列は以下の論理式からなるものとする：

(1) $$\mathfrak{C}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{C}(\varepsilon_x \mathfrak{C}(x)),$$

(2) $$\mathfrak{C}(\delta(\varepsilon_x \mathfrak{C}(x))) \to \varepsilon_x \mathfrak{C}(x) \neq (\delta(\varepsilon_x \mathfrak{C}(x)))',$$

(3) $$\varepsilon_x \mathfrak{C}(x) = \varepsilon_x \mathfrak{C}(x) \to \varepsilon_x \mathfrak{C}(x) = \varepsilon_y(\varepsilon_x \mathfrak{C}(x) = y).$$

つまり，論理式

(1) $$(\varepsilon_y(\mathfrak{z}' = y) = 0 \to \mathfrak{z} = \mathfrak{z}) \to (\varepsilon_y(\mathfrak{e}' = y) = 0 \to \mathfrak{e} = \mathfrak{z}),$$

(2) $$(\varepsilon_y((\delta(\mathfrak{e}))' = y) = 0 \to \delta(\mathfrak{e}) = \mathfrak{z}) \to \mathfrak{e} \neq (\delta(\mathfrak{e}))',$$

(3) $$\mathfrak{e} = \mathfrak{e} \to \mathfrak{e} = \varepsilon_y(\mathfrak{e} = y)$$

からなるものである．

(1) は $\mathfrak{e}$ に属す第 1 種の問題点となる論理式，(2) は $\mathfrak{e}$ に属す第 2 種の問題点となる論理式で，(3) は階数 1 の ε-項 $\varepsilon_y(\mathfrak{e} = y)$ に属す第 1 種の問題点となる論理式である．項 $\mathfrak{e}$ の他には，基本タイプ $\varepsilon_y(c = y)$ に属す ε-項のみが現れている．これらの基本タイプに対する関数置換は，関数記号 $\varphi_1(c)$，$\varphi_2(c)$，... によって表すことにする．

この論理式の列に我々の全置換の列の構成の手続きを適用すると，まず，最初のところで，基本タイプ $\varepsilon_y(c = y)$ を常に値 0 をとる関数 $\varphi_1(c)$ で置き換えることになる．この置き換え E_1 を論理式 (1)，(2) に記入すると，

(1*) $$(\varphi_1(\mathfrak{z}') = 0 \to \mathfrak{z} = \mathfrak{z}) \to (\varphi_1(\mathfrak{e}_1') = 0 \to \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{z}),$$

(2*) $$(\varphi_1((\delta(\mathfrak{e}_1))') = 0 \to \delta(\mathfrak{e}_1) = \mathfrak{z}) \to \mathfrak{e}_1 \neq (\delta(\mathfrak{e}_1))'$$

が得られる．ここに，$\mathfrak{e}_1$ は階数 1 の ε-項 $\varepsilon_x(\varphi_1(x') = 0 \to x = \mathfrak{z})$ である．

この，$\mathfrak{e}_1$ を唯一の ε-項として含む論理式の組に対しては，2 回の操作 E'_{11}，E'_{12} でレゾルベントを得ることができる．$\mathfrak{e}_1$ の基本タイプ $\varepsilon_x(\varphi_1(x') = a \to x = b)$

はパラメータとして，0, $\mathfrak{z}$ を伴って現れるのみであるから，ここでは，関数置換を行う必要は起こらない．

まず，$\mathfrak{e}_1$ を 0 で置き換える．このことにより，(2*) は真の論理式となるが，(1*) は偽の論理式となる．(1*) により，$\mathfrak{e}_1$ の例証置換 $\mathfrak{z}$ が得られ，それは同時に最小置換にもなっている．$\mathfrak{e}_1$ を $\mathfrak{z}$ で置き換えたものは，(1*) と (2*) のレゾルベントとなっている．ところが，この置き換え E'_{12} に E_1 を組み合わせて得られる全置換 E_{12} は，(1)，(2)，(3) のレゾルベントにはなっていない．この全置換で，$\mathfrak{e}$ は $\mathfrak{z}$ に，また $\varepsilon_y(\mathfrak{e}=y)$ に変換されるので，(3) は偽の論理式になるからである．(3) から $\varepsilon_y(\mathfrak{z}=y)$ に対する例証置換を得るが，これは同時に最小置換にもなっている．

これにより，$\varepsilon_y(c=y)$ に対する 2 番目の置き換え関数 $\varphi_2(c)$ をとることになるが，これは，パラメータ $\mathfrak{z}$ に対し，値 $\mathfrak{z}$ をとり，それ以外のところでは値 0 をとるようなものになっている．この置き換え E_2 を論理式 (1)，(2) に記入すると，論理式

$$(1^{**})\qquad (\varphi_2(\mathfrak{z}')=0\to\mathfrak{z}=\mathfrak{z})\to(\varphi_2(\mathfrak{e}'_2)=0\to\mathfrak{e}_2=\mathfrak{z}),$$

$$(2^{**})\qquad (\varphi_2((\delta(\mathfrak{e}_2))')=0\to\delta(\mathfrak{e}_2)=\mathfrak{z})\to\mathfrak{e}_2\neq(\delta(\mathfrak{e}_2))'$$

が得られる．ここに，$\mathfrak{e}_2$ は項 $\varepsilon_x(\varphi_2(x')=0\to x=\mathfrak{z})$ である．

この論理式では，再び，$\mathfrak{e}_2$ がそこに現れる唯一の ε-項である．したがって，$\mathfrak{e}_2$ への数表記置換により，2 回の操作 E'_{21}，E'_{22} で，レゾルベントを得ることができる．まず，$\mathfrak{e}_2$ を 0 で置き換えることで，(2**) は真の論理式となり，(1**) は偽の論理式となる．(1**) から，$\mathfrak{e}_2$ に対する例証置換 $\mathfrak{z}$ を得る．

もし，第 2 種の問題点となる論理式 (2) を無視できれば，ここですでにレゾルベントが得られているはずである．ところが，この $\mathfrak{e}_2$ の例証置換 $\mathfrak{z}$ は最小置換ではなく，そのために，論理式 (2**) が偽の論理式に変換されてしまう．ここでの ε_2 の最小置換は，$\mathfrak{z}$ の 1 つ前の数表記 "$\mathfrak{z}-1$" となる．(実際，論理式 $\varphi_2((\mathfrak{z}-1)')=0$ は偽となるから，$\mathfrak{e}_2$ を $\mathfrak{z}-1$ で置き換えると (1**) の後節は真の論理式に変換される．一方，$\mathfrak{e}_2$ を $\mathfrak{z}-1$ より小さい数表記で置き換えたときには，論理式 (1**) は偽となる．)

したがって，今度は，$\mathfrak{e}_2$ を $\mathfrak{z}-1$ で置き換えることになるが，これにより，E'_{22} は論理式 (1**)，(2**) のレゾルベントになる．しかし，E'_{22} と E_2 によって惹き起こされる (1)，(2)，(3) に対する全置換 E_{22} では，$\mathfrak{e}$ が値 $\mathfrak{z}-1$ を

得て，$\varepsilon_y(\mathfrak{z}-1=y)$ が値 0 を得るから，(1) は偽となる．ここで，(3) から $\varepsilon_y(\mathfrak{z}-1=y)$ に対する例証置換 $\mathfrak{z}-1$ を得るが，これは同時に最小置換でもある．これにより，基本タイプ $\varepsilon_y(c=y)$ に対し，新しい関数置換 $\varphi_3(c)$ が構成できる．ここに，$\varphi_3(c)$ は，パラメータ $\mathfrak{z}$，$\mathfrak{z}-1$ に対し，それぞれ，値 $\mathfrak{z}$，$\mathfrak{z}-1$ をとり，他のところでは値 0 をとるようなものである．

ここで，我々は，同一の問題点となる論理式から，2 つの異なる，しかし，実際としては等しい全置換により，異なる最小置換が得られるという例をみていることになる．つまり，全置換 E_{11}，E_{21} の両方において，項 $\varepsilon_y(\mathfrak{z}'=y)$，$\varepsilon_y(\mathfrak{e}'=y)$，$\varepsilon_y((\delta(\mathfrak{e}))'=y)$，$\varepsilon_y(\mathfrak{e}=y)$ は，値 0 を得るから，この 2 つの全置換は実際として等しい．両方の全置換とも論理式 (1) により，$\mathfrak{z}$ を $\mathfrak{e}$ の例証置換として与えるが，そこで得られる最小置換は異なる．なぜなら，E_{11} では，最小置換として $\mathfrak{z}$ が得られるが，D_{21} では最小置換は $\mathfrak{z}-1$ となっているからである．論理式 (1)，(2)，(3) に対する全置換の列の構成の手続きをさらに適用してみると，これは，$(\mathfrak{z}+1)$ 回目で停止することがわかる．最初の $\mathfrak{z}$ 個の置換行では，2 つの全置換が現れ，それに対して，最後の置換行では 1 つの全置換が現れる．全置換 $E_{\mathfrak{p}1}$，$E_{\mathfrak{p}2}$ ($\mathfrak{p}=2,\ldots,\mathfrak{z}$) では，基本タイプ $\varepsilon_y(c=y)$ は，$\mathfrak{z}$，$\mathfrak{z}-1,\ldots,\mathfrak{z}-(\mathfrak{p}-2)$ で，それぞれ，値 $\mathfrak{z}$，$\mathfrak{z}-1,\ldots,\mathfrak{z}-(\mathfrak{p}-2)$ をとり，その他のところでは値 0 をとるような関数 $\varphi_{\mathfrak{p}}(c)$ で置き換えられ，ε-項 $\mathfrak{e}$ は，$E_{\mathfrak{p}1}$ では 0 で，また $E_{\mathfrak{p}2}$ では $\mathfrak{z}-(\mathfrak{p}-1)$ で置き換えられる．全置換 $E_{\mathfrak{z}+1,1}$ では，基本タイプ $\varepsilon_y(c=y)$ は，$\mathfrak{z}$ から $0'$ の間の数表記 $\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{t}$ に移し，その他のところでは常に値 0 をとるような関数で置き換えられる．この関数置換と $\mathfrak{e}$ に対する 0-置換が，論理式 (1)，(2)，(3) のレゾルベントとなる．

ここで，我々のレゾルベントを得るための一般的な手続きで必要となる全置換の数 $2\mathfrak{z}+1$ は，この論理式の列を与える際に任意にとれる $\mathfrak{z}$ により決まるわけだから，いずれにしても，ここに現れる ε-項の階数と互いに異なる ε-項の総数のみに依存する表現によって表すことはできない．

したがって，(我々の全置換の列の構成により）レゾルベントが構成できることの証明では，問題点となる論理式は第 1 種のものに限る[82]という制限を落とすことはできないことがわかる．しかし，この点に関する議論により，問題点となる論理式を，少なくとも部分的には我々の結果に組み込めることがわかる．

---

[82] 173 ページ参照.

すでにみたように，例証置換から最小置換への移行は，第 2 種の問題点となる論理式が現れる場合にも我々の手法が有効であるようにするために必要になったのであったが，これが障害となるのは，主張 6.[83]の証拠のみにおいてであって，それ以外では，必要となる全置換の数の評価は，これによりまったく影響を受けないのであった．ところが，これに関する考察では，階数が 1 より高い問題点となる論理式に対して得られた例証置換のみが問題となるのであった．

したがって，主張 6. の証拠は，階数が 1 より高い基本タイプに対しては例証置換を直接用いることができるなら，つまり，第 2 種の問題点となる論理式の階数が 1 のみのときには，まだ有効である．よって，**そこに現れる第 2 種の問題点となる論理式が全て階数 1 であるような論理式の列において，必要となる全置換の総数の評価 $\psi(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ は有効である．**

g) 得られた結果の無矛盾定理への応用．　論理式の列のレゾルベントの確定という課題に取り組むに至るまでの，考察の過程に再び立ち戻ってみよう．このレゾルベントの確定の課題は，これが解けると数論の形式的体系の無矛盾性が示せるという見通しのもとになされたのであった．この目標は，問題点となる論理式を階数が 1 のものに制限しなければならなかったことで，達成できなかった．

ここで，この制限に対応する形式的体系の領域はどのようなものになるかということが問題となる．第 2 種の問題点となる論理式が正規化された証明で現れるのは，帰納法図式の使用を，論理式

$$A(a) \to \varepsilon_x A(x) \neq a'$$

を ε-論理式，等号の公理 (J_2)，論理式 $a \neq 0 \to (\delta(a))' = a$ とともに，命題計算で使用することに帰着させたためであった[84]．

これを得た際，ある論理式 $\mathfrak{A}(c)$ に適用された帰納法図式を，上に述べたような論理式による $\mathfrak{A}(a)$ の，$\mathfrak{A}(0)$ と $\mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(a')$ からの導出で置き換えたときには[85]，この図式に対応する正規化された証明の部分では，そこに現れる

---

[83] 176 ページ参照.

[84] 140 ページ以降参照.

[85] 141–142 ページ参照.

第2種の問題点となる論理式は，

$$\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{d})} \to \varepsilon_{\mathfrak{x}}\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{x})} \neq \mathfrak{d}'$$

ただ1つであった．項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{x})}$ に属すこの問題点となる論理式が，階数 1 を持つのは，この項が，それの下位にある項を含まないときである．つまり，$\mathfrak{A}(c)$ で変数 c が ε-記号の適用範囲内に現れないときである．

このよう規定された制限は，量化詞を（ε-記号により）除去した後で得られる論理式の集合に対して適用されるべきものである．実際に問題とすべき数論の形式的体系では，量化詞も現れるわけだが，その場合には，この制限は，$\mathfrak{A}(c)$ で，変数 c は量化詞の適用範囲内にも，ε-記号の適用範囲内にも現れないということになる．

これにより，形式的体系 (Z) から**帰納法図式を，論理式 $\mathfrak{A}(c)$ で，変数 $\mathfrak{c}$ は量化詞の適用範囲内にも ε-記号の適用範囲にも現れないようなものに制限する**ことで得られる部分体系の無矛盾性証明がなされたことになる．この条件は，束縛変数を完全に除外する，これまでに考察していた“制限された帰納法図式”によるものより[86]，幾分か制限が弱いものとなっている．

上で規定した部分体系に対しては，単に無矛盾性の証明ができただけでなく，無矛盾定理の証明が得られたことになる[87]．

つまり，無矛盾性は，全ての導出可能な無変数の論理式は真であるという意味で確立されているのである．さらに，導出可能な論理式で

$$(E\,\mathfrak{x}_1)\ldots(E\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{n}})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_{\mathfrak{n}})$$

という形をしていて，$\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_{\mathfrak{n}}$ 以外には変数を含まないようなものについては，このような論理式は量化詞の除去のプロセスにより，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{e}_1,\ldots\mathfrak{e}_{\mathfrak{n}})$$

という論理式で，$\mathfrak{e}_1,\ldots,\mathfrak{e}_{\mathfrak{e}}$ は ε-項で，これらの項以外には，別の変数を含まず，これらの項の中にも自由変数の現れないようなものに変換される．この論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{e}_1,\ldots\mathfrak{e}_{\mathfrak{n}})$ に対し正規化された証明が得られるが，この証明に現れる問題点となる論理式と ε-同等性論理式に対しては，レゾルベントを求めることが

86 101 ページ下参照．

87 83 ページ下参照．

できる．このレゾルベントによって定まる実際の置き換えを，この正規化された証明に記入して，そこでまだ残っている ε-項を数表記 0 で置き換えれば，この正規化された証明の全ての初式，したがって，その他の論理式も全て真の論理式に変換される．特に，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n)$ から ε-項 $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ を，それらの数表記置換 $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$ で置き換えて得られる論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n)$$

は，真の論理式となる．

このようにして，上で仮定したような性質を持つ論理式 $(E\,\mathfrak{x}_1)\ldots(E\,\mathfrak{x}_n)\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ から，$\mathfrak{A}(\mathfrak{z}, \ldots, \mathfrak{z}_n)$ が真の論理式となるような，数表記 $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$ を確定することができる．

これにより，ここで考察している形式的体系において，無矛盾定理の主張が全て成立していることになる．

この無矛盾定理の証明法は，ここでの数論の体系の，その他の拡張でも有効である．まず，証明のやり方に変更を加えずに，この体系を，与えられたパラメータの値に対する関数値の計算方法の与えられているような関数記号と，確証可能な論理式で拡張することができる．これにより，この章の第1節で考察した数論の形式的体系[88]の無矛盾性が示せたことになる．

さらに，我々の証明法は，形式的体系に，μ-記号と論理式 (μ_1)，(μ_2)，(μ_3):

$$\begin{array}{lrcl} (\mu_1) & (E\,x)A(x) & \rightarrow & A(\mu_x A(x)) \\ (\mu_2) & A(a) & \rightarrow & \mu_x A(x) \leq a \\ (\mu_3) & (x)\overline{A(x)} & \rightarrow & \mu_x A(x) = 0 \end{array}$$

で，(μ_2) については，代入型 $A(c)$ に代入される論理式 $\mathfrak{A}(c)$ では，変数 $\mathfrak{c}$ が量化詞の適用範囲内にも，μ-記号の適用範囲内にも入っていないという条件で制限されたものが付け加えられたものに対しても，有効である[89]．

なぜなら，まず論理式 (μ_3) は，述語計算と論理式 (μ_1) から，論理式

$$(\mu_3') \qquad \overline{A(\mu_x A(x))} \rightarrow \mu_x A(x) = 0$$

が導かれ，論理式 (μ_1) は述語計算により，論理式

---

[88] 97–107 ページ参照．

[89] この条件は，代入の初式への引き戻しによって生じる論理式 (μ_2) への間接的な代入にも適用されるべきものである．

$$(\mu_1')\qquad A(a) \to A(\mu_x A(x))$$

と演繹的に同値となる．したがって，論理式 (μ_1)，(μ_2)，(μ_3) の付加は，論理式 (μ_1')，(μ_2)，(μ_3') の付加と同値になる．

これらの論理式は，レゾルベントの確定の手続きに容易に組み込むことができる．つまり，ここで，全ての $\mu_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v})$ という形の表現を $\varepsilon_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}(\mathfrak{v})$ で置き換えると，(μ_1') は ε-論理式となる．論理式 (μ_2)，(μ_3') は（量化詞と自由変数の除去の後）新しい種類の "問題点となる論理式" に移行する．つまり，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}) \to \varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \leq \mathfrak{k}$$

という形をしたものと

$$\overline{\mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))} \to \varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) = 0$$

という形をしたものである．しかし，これらの論理式のために，新しい種類の取り扱いは必要にはならない．なぜなら，論理式

$$\overline{\mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))} \to \varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) = 0$$

は，項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ あるいは，これの代わりに（ここに格納された ε-項の代入によって）生じる項が，0-置換あるいは例証置換を得るような全置換により，真の論理式に移行するし，論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}) \to \varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \leq \mathfrak{k}$$

は，項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$，あるいは，これの代わりに生じる項が，0-置換，あるいは最小置換を得るような全置換により，真の論理式に移行するからである．

さて，すでにわかっているように[90]，我々のレゾルベントの確定の手続きは，階数 1 の ε-項でのみ，最小置換が必要になっているような場合にうまくゆくのであった．

この条件が，ここでの場合に成り立つためには，全ての代入の初式への引き戻しにより (μ_2) での代入型 $A(c)$ の論理式変数の代入型に代入される全ての論理式 $\mathfrak{A}(c)$ が，変数を c 量化詞または μ-記号の適用範囲内に持たなければ，十分である．なぜなら，容易にわかるように，この制限により，論理式 (μ_2) により現れる問題点となる論理式は，全て階数 1 を持つことになるからである．

---

[90] 183 ページ参照．

これにより，論理式 (μ_1)，(μ_2)，(μ_3) は，実際に，上で述べた (μ_2) の使用に関する制限のもとで，得られていた無矛盾定理に組み込むことができる．

またさらに，この方法は，数論以外の形式的体系に応用することもできる．実際，レゾルベントの確定の手続きで数表記が特別な役割を果たすのは，第2種の問題点となる論理式に関連する場所のみである．しかし，第2種の問題点となる論理式が出てくるのは，完全帰納法の原理の形式化においてのみであった．第2種の問題点となる論理式と，それによって必要になっていた最小置換を省略して，ε-項の置き換えが数表記の代わりに，適当な無変数項によってなされ，したがって，特に 0 の受け持つ役割を適当に選んだ個体記号に割り当てても，証明の大筋は影響を受けない．

このようにして，レゾルベントの確定の方法により，述語計算，ε-記号，一般的な等号の公理，それに，幾つかの束縛変数を持たない本来の公理で，無変数項の付値により確証可能なものからなる，形式的体系に対する無矛盾定理が成り立つことがわかる．ただし，ここに，無変数の等式の付値は，善良な等号の付値によりなされているものとする[91]．

この最後の条件は，全ての無変数の初等論理式の付値は，その論理式に現れる無変数項 $\mathfrak{a}$ を，それと“同等な”項，つまり，論理式 $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ が真になるような項 $\mathfrak{b}$ で置き換えても変化しないという，さらに弱いものに変えることができる．このような善良な等号の付値が仮定されていない一般化された場合には，レゾルベントの確定の手続きを少々修正して，置き換え関数を決めるところで，同等なパラメータの関数値は同等になるように注意する必要がある．

これらのさまざまな応用にもかかわらず，レゾルベントの確定の手続きにより，到達できるはずであった本来の目的，完全な形の数論の形式的体系の無矛盾性は，この方法によって証明できない．しかし，予告しておいた[92]第2 ε-定理の証明は，まだなされていなかったので，上の問題についてさらに議論を進める前に，第3章で始めた考察を最後まで行っておくことにする．

---

[91]前提条件がこのように一般的にとれることは，フォン・ノイマンの前に引用した無矛盾性証明（*Math. Z.* Bd. 26）では，初めからはっきりと意識して扱われている．

[92]63 ページ参照．

第5章　ε-記号の論理学的形式的体系の研究への応用

5.1　第2 ε-定理

前の2つの章で得られた結果は，我々が ε-記号を導入する契機となった，2つの問題のうちの1つに関連してくるものであった．つまり，これは述語論理（と，場合によっては ε-論理式）による導出で，そこに用いられた公理と導出された論理式に束縛変数が含まれていない場合に，束縛変数を完全に除去することの一般的な可能性に関するもので，この可能性は，第1 ε-定理[1]により確立された．そこで残されたもう1つの課題は，存在論理式の記号による整約の手続きに関するものであった[2]．1階の形式的体系の公理系 $\mathfrak{S}$ に，この手続きを適用することにより，$\mathfrak{S}$ で導出可能な，$\mathfrak{S}$ の記号で構成された論理式の全体は拡張されないということが示すべきことであった．

ε-記号と ε-論理式——これを用いて存在論理式の記号による整約が一般的な形で記述されたのであった——により，この主張の証拠の課題は，上のような記号による整約に関する定理を含み，それをさらに一般化する，第2 ε-定理の証拠に帰着するのであった．

第2 ε-定理がどのようなものだったかを復習しておこう．ここで取り扱われるのは，述語論理に ε-記号と幾つかの ε-記号を含まない本来の公理，およびそれに含まれる個体記号，関数記号，述語記号を付け加えることで得られる形式的体系 F であった．定理の主張は，F で導出可能な論理式 $\mathfrak{E}$ で ε-記号を含まないものは，ε-記号をまったく用いずに導出可能であるというものである．

---

[1] 52 ページ参照．

[2] 49 ページ，51 ページ参照．

証拠にあたって，二，三の準備的な簡略化を行う．まず，一般性を失うことなく，論理式 $\mathfrak{E}$ の導出では，公理は1つも用いられていないとしてよいことを注意しておく．これをみるために，このような特殊な場合について，第2 ε-定理の主張が示せたと仮定して，形式的体系 F での ε-記号を含まない論理式 $\mathfrak{E}$ の証明で，公理

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{\mathfrak{l}}$$

が用いられているものが与えられたとしよう．これらは，形式的体系 F に対する我々の仮定により，本来の公理であり，これらの論理式に現れる自由個体変数を束縛（つまり，この論理式の前に付け加えられる全称記号によって束縛された）変数に置き換えることで[3]，自由変数を含まない対応する論理式 $\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_{\mathfrak{l}}$ と演繹的に同値な論理式

$$\mathfrak{A}_1^+, \ldots, \mathfrak{A}_{\mathfrak{l}}^+$$

が得られる．これらの論理式 $\mathfrak{A}_1^+,\ldots,\mathfrak{A}_{\mathfrak{l}}^+$ は，ε-記号も含んでいない．ここで，演繹定理により，論理式

$$\mathfrak{A}_1^+ \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_{\mathfrak{l}}^+ \rightarrow \mathfrak{E}$$

の，F での導出で，公理のまったく用いられていないものが得られる[4]．論理式

$$\mathfrak{A}_1^+ \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_{\mathfrak{l}}^+ \rightarrow \mathfrak{E}$$

は ε-記号を含まないから，仮定により，公理のまったく使われていない，この論理式の導出から，ε-記号の使用を完全に除去することができて，その結果，これの述語計算のみによる導出が得られる．ところが，この導出からは，公理 $\mathfrak{A}_1$, $\ldots,\mathfrak{A}_{\mathfrak{l}}$ を用いた述語計算での，論理式 $\mathfrak{E}$ の導出で，ε-記号は使われていないようなものを得ることができる．したがって，我々の証拠においては，実際に，論理式 $\mathfrak{E}$ が公理を使わずに，つまり述語計算と ε-論理式のみによって導出されている場合のみを考察すれば十分であることがわかった．

もう1つの簡略化は，我々の証拠で，論理式 $\mathfrak{E}$ をそれと述語計算において演繹的に同値になる任意の論理式 $\mathfrak{E}_1$ で代用してかまわないという事実を用いる

[3]本書第2章，36 ページ参照．

[4]原書 I，154–155 ページでの考察を参照．

ことで得られる．このときには，$\mathfrak{E}_1$ は，やはり，形式的体系 F で導出可能となるが，もし，$\mathfrak{E}_1$ の導出から ε-記号の使用を取り除くことができれば，述語計算による $\mathfrak{E}$ の $\mathfrak{E}_1$ からの導出を用いることにより，$\mathfrak{E}$ の導出で ε-記号のまったく用いられていないものが得られるからである．

特に，一般性を失うことなく，論理式 $\mathfrak{E}$ はスコーレム標準型[5]

$$(E\,\mathfrak{x}_1)\ldots(E\,\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(\mathfrak{y}_1)\ldots(\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

になっていると仮定して構わない．ここに，$\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s}$ は，この論理式に現れる全ての束縛変数である．ここで，さらに，少なくとも 1 つの存在記号は実際に現れると仮定してよい．なぜなら，$\mathfrak{F}$ を任意の論理式として，$\mathfrak{B}(\cdot)$ をパラメータを 1 つ持つ論理式変数とし，$\mathfrak{x}$ を $\mathfrak{F}$ に現れない束縛変数とするとき，論理式

$$(E\,\mathfrak{x})((\mathfrak{B}(\mathfrak{x}) \vee \overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{x})})\ \&\ \mathfrak{F})$$

から，$\mathfrak{F}$ が導出できるからである[6]．

以上により，我々の証拠でやるべきことは，

$$(E\,\mathfrak{x}_1)\ldots(E\,\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(\mathfrak{y}_1)\ldots(\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

という形の論理式 $\mathfrak{E}$ で，$\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s}$ がそこに現れる全ての束縛変数となっており，$\mathfrak{r} \neq 0$ であるようなものの述語論理と ε-論理式による導出から，ε-論理式の使用を取り除くことができることを示すことに帰着された．

この主張は，論理式の初めに並んでいる全称記号の数が 0 の場合には，第 1 ε-定理の直接的な帰結として示すことができる．つまり，この場合には，論理式 $\mathfrak{E}$ は

$$(E\,\mathfrak{x}_1)\ldots(E\,\mathfrak{x}_\mathfrak{r})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r})$$

という形をしているが，第 1 ε-定理により，この論理式の導出で，述語計算と ε-論理式によるものから，離接論理式で各離接節が，ある束縛変数を含まない項 $\mathfrak{t}_1,\ldots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}$ に対し，$\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1,\ldots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r})$ という形をしているようなものの述語計算のみによる導出が得られる．ところが，そのような離接論理式からは，述語計

[5]原書 I，158 ページ参照.〔訳注: 本書第 2 章，36 ページの 5 を参照.〕

[6]ついでにいうと，論理式 $(\mathfrak{y}_1)\ldots(\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\mathfrak{A}(\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$ で，$\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s}$ が束縛変数の全てであるようなものに対しては，その束縛変数を自由変数と取り替えることで，それと演繹的に等しい束縛変数を持たない論理式が得られるから，すでに第 1 ε-定理により片がついてしまう．

算により，再び $\mathfrak{E}$ が得られるから，全体として，$\mathfrak{E}$ の導出で，述語計算のみによるものが得られたことになる．

一般的な場合の証拠も，この簡単な特殊例と類似の取り扱いによって行いたい．このために，述語論理で導出可能な論理式

$$(1)\qquad (\mathfrak{y}_1)\ldots(\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})A(a_1,\ldots,a_{\mathfrak{r}},\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}}) \to A(a_1,\ldots,a_{\mathfrak{r}},b_1,\ldots,b_{\mathfrak{s}})$$

を考える．これは,（束縛変数の書き換えと）基本論理式 (a) の使用，および連鎖推論[7]により得られる．ここで，$\mathfrak{s}$ 個の新しい $\mathfrak{r}$-変数関数記号

$$\mathfrak{f}_1(c_1,\ldots,c_{\mathfrak{r}}),\ldots,\mathfrak{f}_{\mathfrak{s}}(c_1,\ldots,c_{\mathfrak{r}})$$

を導入する．これらを用いることにより，論理式 (1) から，代入により，論理式

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{y}_1)\ldots(\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})A(a_1,\ldots,a_{\mathfrak{r}},\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})\\ &\qquad\to A(a_1,\ldots,a_{\mathfrak{r}},\mathfrak{f}_1(a_1,\ldots,a_{\mathfrak{r}}),\ldots,\mathfrak{f}_{\mathfrak{s}}(a_1,\ldots,a_{\mathfrak{r}}))\end{aligned}$$

を得る．さらに，これに述語論理で導出された規則 (δ)[8]を繰り返し用いて，代入を行うことにより，

$$\begin{aligned}&(E\mathfrak{x}_1)\ldots(E\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}})(\mathfrak{y}_1)\ldots(\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}},\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})\\ &\qquad\to(E\mathfrak{x}_1)\ldots(E\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}},\mathfrak{f}_1(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}}),\ldots,\mathfrak{f}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}}))\end{aligned}$$

が得られるが，これと論理式 $\mathfrak{E}$ から，推論図式により，

$$(2)\qquad (E\mathfrak{x}_1)\ldots(E\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}},\mathfrak{f}_1(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}}),\ldots,\mathfrak{f}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}}))$$

が得られる．よって，この論理式 (2) の述語計算と ε-論理式からの導出が得られたことになる．さらに，第1 ε-定理の拡張[9]により，論理式 (2) の導出から，離接論理式

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}&\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1^{(1)},\ldots,\mathfrak{t}_{\mathfrak{r}}^{(1)},\mathfrak{f}_1(\mathfrak{t}_1^{(1)},\ldots,\mathfrak{t}_{\mathfrak{r}}^{(1)}),\ldots,\mathfrak{f}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{t}_1^{(1)},\ldots,\mathfrak{t}_{\mathfrak{r}}^{(1)}))\\ \vee\ldots\vee\ &\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{m})},\ldots,\mathfrak{t}_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{m})},\mathfrak{f}_1(\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{m})},\ldots,\mathfrak{t}_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{m})}),\ldots,\mathfrak{f}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{m})},\ldots,\mathfrak{t}_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{m})}))\end{aligned}\right.$$

の，束縛変数のまったく用いられていない導出が得られる．ここに，$\mathfrak{t}_1^{(1)},\ldots,\mathfrak{t}_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{m})}$ は ε-記号を含まない項である．この導出は，自由変数を持つ初等計算のみでなされているものである．この論理式を得た際に用いられた除去手続きによ

[7]訳注: $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$，$\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}$ から，$\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}$ を得る推論．

[8]原書 I，108 ページ参照．

[9]79 ページ参照．

り，これとは少し異なる導出で，代入が全て初式に引き戻されて，終式 (3) が幾つかの初式から推論図式（と繰り返し）のみから得られているようなものが求まる．この際の初式は，全て命題計算の恒真な論理式から代入により得られるようなものである．

この導出に現れる全ての初等論理式を論理式変数で置き換えると，つまり，同一の形態をしている初等論理式は同一の論理式変数で，違う形態の初等論理式はそれぞれ違う初等論理式でというように置き換えると，ここでの推論図式は，再び推論図式に変換され，初式も全て命題計算で恒真な論理式に変換される．したがって，論理式 (3) に代わって現れる論理式も恒真な論理式でなければならない．逆に，ここで行われた置き換えでは，同一の論理式変数は同一の初等論理式に対応するようになっているから，代入により，この論理式から，論理式 (3) が得られる．

したがって，論理式 (3) は，命題論理の恒真な論理式への代入によって得られる．よって，同一の形態の初等論理式のパラメータは，同一の置き換えがなされているように留意して，項

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t}_1^{(i)}, \ldots, \mathfrak{t}_{\mathfrak{r}}^{(i)}); \qquad \begin{array}{l} \mathfrak{p} = 1, \ldots, \mathfrak{s} \\ \mathfrak{i} = 1, \ldots, \mathfrak{m} \end{array}$$

を，自由個体変数で置き換えることで，(3) から得られる論理式についても，同様のことはいえなければならない．

このような置き換えを行う前に，次の点を注意しよう．項 $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t}_1^{(i)}, \ldots, \mathfrak{t}_{\mathfrak{r}}^{(i)})$ ——これを略して $\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}^{i}$（ただし，$\mathfrak{p} = 1, \ldots, \mathfrak{s}$，$\mathfrak{i} = 1, \ldots, \mathfrak{m}$）と記すことにする——において，それらのおのおのに現れる関数記号 $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_{\mathfrak{s}}$ の数（ただし，これらの関数記号は，出現するごとに重複も含めて数え上げられることにする）を考えると，この

$$\mathfrak{k}_1^{i}, \ldots, \mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}^{i}$$

の“重複度”は全て同じものになる．したがって，離接論理式 (3) での離接節の番号 $\mathfrak{i}$ に対し，この重複度を一意に対応させることができる．

ここで，(3) の離接節の順序で，この順序により離接節の重複度が減少しないようなものを選ぶことができる．命題計算により，最初から，離接節は，この順序で並んでいるとしてよい．また，離接 (3) では，離接節の繰り返しはな

いものとする．繰り返しは，同様に，命題計算により取り除くことができるからである．

このような条件が満たされることによって，論理式 (3) の形態に対して次のような性質が成り立つ．

1.$\mathfrak{p}$ が $\mathfrak{q}$ と異なるか，$\mathfrak{i}$ が $\mathfrak{j}$ と異なるときには，$\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{i}}$ は $\mathfrak{k}_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{i}}$ と形態として異なる．

これについては，まず，$\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{i}}$ と $\mathfrak{k}_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{i}}$ が同一のものであるためには，$\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{q}$ が同じでなければならないことは明らかである．また，同一性が成り立つためには，$\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{i})},\ldots,\mathfrak{t}_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{i})}$ がそれぞれ $\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{j})},\ldots,\mathfrak{t}_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{j})}$ と等しくなければならないが，この場合には，$\mathfrak{k}_1^{\mathfrak{i}},\ldots,\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{i}}$ が $\mathfrak{k}_1^{\mathfrak{j}},\ldots,\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{j}}$ と等しくなるから，$\mathfrak{i}$ 番目の離接節と $\mathfrak{j}$ 番目の離接節と等しくなる．これは，しかし，$\mathfrak{i}$ と $\mathfrak{j}$ が等しい数である場合のみに可能である．

2. 項 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{i}}$ が，項 $\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{j})},\ldots,\mathfrak{t}_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{j})}$ の1つと等しいか，あるいは，それらの1つの構成要素となっているのは，$\mathfrak{i}$ が $\mathfrak{j}$ より小さいときに限る．

なぜなら，$\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{i}}$ が，項 $\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{j})},\ldots,\mathfrak{t}_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{j})}$ の1つと等しいか，または，それの構成要素として現れる場合には，数 $\mathfrak{i}$ に属す重複度は，$\mathfrak{j}$ に属すものより小さくなくてはならない．したがって，$\mathfrak{i}$ は $\mathfrak{j}$ より小さい．

1により，論理式 (3) から，再び恒真な論理式への代入により生じる論理式で，以前には用いられていない新しい自由個体変数の列

$$\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{s}}$$

を導入して，項 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{i}}$ ($\mathfrak{p}=1,\ldots,\mathfrak{s}$, $\mathfrak{i}=1,\ldots,\mathfrak{m}$) を対応する変数 $\mathfrak{a}_{(\mathfrak{i}-1)\cdot\mathfrak{s}+\mathfrak{p}}$ で[10]置き換えることで得られるものが考えられる．ここで，置き換えは，(3) で，項 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{i}}$ が，他の項 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{j}}$ の構成要素としてでなく，現れる全ての場所で行われる．

このようにして得られた論理式

$$(3^*)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A}(\mathfrak{l}_1^{(1)},\ldots,\mathfrak{l}_{\mathfrak{r}}^{(1)},\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_{\mathfrak{s}})\vee\mathfrak{A}(\mathfrak{l}_1^{(2)},\ldots,\mathfrak{l}_{\mathfrak{r}}^{(2)},\mathfrak{a}_{\mathfrak{s}+1},\ldots,\mathfrak{a}_{2\cdot\mathfrak{s}}) \\ \qquad\vee\ldots\vee\mathfrak{A}(\mathfrak{l}_1^{(\mathfrak{m})},\ldots,\mathfrak{l}_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{m})},\mathfrak{a}_{(\mathfrak{m}-1)\cdot\mathfrak{s}+1},\ldots,\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{s}}) \end{cases}$$

では，主張2により，変数

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{i}-1)\cdot\mathfrak{s}+1,\ldots,\mathfrak{a}_{\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{s}}$$

は，最初の $\mathfrak{i}-1$ 個の離接節にも，項 $\mathfrak{l}_1^{(\mathfrak{i})},\ldots,\mathfrak{l}_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{i})}$ にも現れない．

[10] この $(\mathfrak{i}-1)\cdot\mathfrak{s}+\mathfrak{p}$ や，後出のそれに類する表現は，それを計算することで得られる数表記の表記と理解されるべきものである．

このような状況により，論理式 (3*) から述語計算により，論理式 $\mathfrak{E}$ へ戻ることが可能になる．この導出を得るためには，述語論理の 2 つの導出可能な規則に，前に得た導出可能な規則 (γ) —— (λ)[11] を加えたものを考えればよい．

規則 (μ): ある論理式が離接の形をしているとき，これの任意の離接節に現れる，1 つの項を束縛変数で置き換え，これを，その離接節の初めで存在記号により束縛することができる．

規則 (ν): ある論理式が離接の形をしていて，これの離接節の 1 つが，他の離接節には現れない自由個体変数を含んでいるとき，この自由変数を，それの現

---

[11] 原書 I，107–109 ページおよび 132–139 ページ参照．

訳注: これらは，以下のような推論規則である:

$$(\gamma) \qquad \frac{\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}(a))}{\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to (x)\mathfrak{C}(x))}$$

$$(\delta) \qquad \frac{\mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{B}(a)}{(x)\mathfrak{A}(x) \to (x)\mathfrak{B}(x)}, \quad \frac{\mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{B}(a)}{(Ex)\mathfrak{A}(x) \to (Ex)\mathfrak{B}(x)}$$

(ϵ) 与えられた論理式の自由変数を，(適当な束縛変数で書き換え) 対応する全称記号または存在記号をこの論理式の前に置くことで，任意の順序で束縛してよい．

(ζ) 含意論理式あるいは同値論理式の両側に，ある自由変数が現れるとき，それらの自由変数を，両側で同じ順序で，全称記号あるいは存在記号により束縛してよい．

(η) 幾つもの量化詞が前に並んだ形の論理式が与えられたとき，これらの量化詞に続く表現に対し，この表現で束縛変数を自由変数で置き換えて得られる論理式に対して，許された変形を全て行ってよい．特に，これに対し命題計算の変形を行ってよい．

(ϑ) 論理式が，前に並んだ 1 つ以上の全称記号を伴った合接の形をしているとき，それらの全称記号を，それぞれの合接節の前に移してよい．同様に，論理式が，前に並んだ 1 つ以上の存在記号を伴った離接の形をしているとき，それらの存在記号を，それぞれの離接節の前に移してよい．

(ι) 合接あるいは離接の前に 1 つ以上の量化詞，つまり全称記号と存在記号が任意の順序で並んでいて，それぞれの量化詞に属す変数は，合接あるいは離接の節のある 1 つのみに現れるとき，これらの量化詞を，それぞれ対応する節の前に動かすことができる．

(κ) 続けて現れる全称記号，あるいは続けて現れる存在記号は，それらが全て同じ表現に対するものであるときには，その順序を任意に入れ換えることができる．

(λ) 量化詞が前に付いた論理式の否定は，前に付いた量化詞のおのおのを，それが全称記号なら存在記号に，存在記号なら全称記号に置き換え，それらに続く表現を，その否定で置き換えることで得られる．

れる離接節の中で束縛変数に置き換え，それに属す全称記号をこの離接節の初めに置くことができる．

この束縛変数の選択にあたっては，そのおのおのについて束縛変数の衝突が起こらないように注意する必要がある．

規則 (μ) は，基本論理式 (b) と命題論理を用いることで得られる．まず，命題論理により離接節は任意に並べ変えられるから，考察している離接論理式は

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(\mathfrak{t})$$

の形をしていて，$\mathfrak{t}$ が束縛変数で置き換えられようとしている項であると仮定してよい．したがって，問題となっているのは，論理式 $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(\mathfrak{t})$ から，論理式

$$\mathfrak{A} \vee (E\,\mathfrak{x})\mathfrak{B}(\mathfrak{s})$$

への移行である．ここに $\mathfrak{x}$ は $\mathfrak{B}(a)$ に現れない束縛変数である．この論理式は，与えられている論理式から，論理式 (b) への代入により得られる論理式

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{t}) \to (E\,\mathfrak{x})\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$$

を用いることで得られる．

ここで注意すべきことは，$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(\mathfrak{t})$ で，項 $\mathfrak{t}$ が明示された場所以外に現れる可能性も許されている点である．特に，$\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{A}$ の中に現れる可能性もある．

規則 (ν) では，これより強い前提条件が用いられている．ここでは，置き換えられるべき項は，自由変数でなくてはならず，これが現れるのは，変更を施される離接節の中だけでなければならない．

規則 (μ) の論証でと同様に，与えられた論理式は

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(c)$$

という形をしており，c は，今度の場合，自由変数で，明示された場所以外には現れないものとする．ここで問題となるのは，この論理式から，

$$\mathfrak{A} \vee (\mathfrak{x})\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$$

という形で，$\mathfrak{x}$ は $\mathfrak{B}(c)$ に現れない束縛変数となっているような論理式への移行である．

この移行を得るには，まず，論理式

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(c)$$

を

$$\overline{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{B}(c)$$

と変形して，図式 (α)（と，必要なら幾つかの代入）により，論理式

$$\overline{\mathfrak{A}} \to (\mathfrak{x})\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$$

を得る．これに初等的な変形を施すことで，

$$\mathfrak{A} \vee (\mathfrak{x})\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$$

が得られる．この移行は，基本論理式 (a) により，逆方向にも行うことができる．したがって，規則 (ν) での論理式の変換は，論理式を演繹的に同値な論理式に変換する可逆なプロセスとなっている．これに対し，規則 (μ) による変換は，すぐにみてとれるように，一般には可逆ではない．

規則 (μ), (ν) により，論理式 (3^*) から論理式 $\mathfrak{E}$ へ戻ることが可能になる．

まず，(3^*) の最後の離接節のみに含まれ，しかし，$\mathfrak{l}_1^{(\mathfrak{m})},\ldots,\mathfrak{l}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{m})}$ には含まれない変数

$$\mathfrak{a}_{(\mathfrak{m}-1)\cdot\mathfrak{s}+1},\quad \mathfrak{a}_{(\mathfrak{m}-1)\cdot\mathfrak{s}+2},\ldots,\ \mathfrak{a}_{\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{s}}$$

について，規則 (ν) を $\mathfrak{s}$ 回適用して，その際に，束縛変数として $\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s}$ を採用することにより，最後の離接節の代わりに

$$(\mathfrak{y}_1)\ldots(\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\mathfrak{A}(\mathfrak{l}_1^{(\mathfrak{m})},\ldots,\ \mathfrak{l}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{m})},\mathfrak{y}_1,\ldots,\ \mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

を得る．さらに，この節の代わりに規則 (μ) を $\mathfrak{r}$ 回適用して，その際，変数として $\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}$ を採用することにより，

$$(E\mathfrak{x}_1)\ldots(E\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(\mathfrak{y}_1)\ldots(\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\ \mathfrak{x}_\mathfrak{r},\mathfrak{y}_1,\ldots,\ \mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

が得られる．今度はここで，変数

$$\mathfrak{a}_{(\mathfrak{m}-2)\cdot\mathfrak{s}+1},\ldots,\ \mathfrak{a}_{(\mathfrak{m}-1)\cdot\mathfrak{s}}$$

は，最後から 2 番目の離接節のみに現れ，この中で，項 $\mathfrak{l}_1^{(\mathfrak{m}-1)},\ldots,\mathfrak{l}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{m}-1)}$ には含まれないから，この最後から 2 番目の離接節についても，先に最後の離接節に行ったのと同様の操作を施すことができて，再び，$\mathfrak{s}$ 回の規則 (ν) の適用と $\mathfrak{r}$ 回の規則 (μ) の適用により，この離接節の代わりに，

$$(E\mathfrak{x}_1)\ldots(E\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(\mathfrak{y}_1)\ldots(\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\ \mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

が得られる．同様の手続きを繰り返すことで，最後には，全ての節が

$$(E\mathfrak{x}_1)\ldots(E\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(\mathfrak{y}_1)\ldots(\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

という形をしている，つまり $\mathfrak{E}$ となっているような離接論理式を得るが，これは，命題計算により $\mathfrak{E}$ に変形することができる．これにより，論理式 (3*) から，述語計算によって，再び $\mathfrak{E}$ が得られたことになる．

以上により，第2 ε-定理の証拠が完了した．以下で，この証拠での手法により，さらに得られる，幾つかの結果についてみてみることにしよう．

5.2　一般的な等号の公理の第2 ε-定理への組み込み，関連した除去法に関する考察

第2 ε-定理の証拠では，第1 ε-定理の拡張が本質的に用いられていた．つまり，これによって，論理式 (2)

$$(E\mathfrak{x}_1)\ldots(E\mathfrak{x}_\mathfrak{r})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\mathfrak{f}_1(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}),\ldots,\mathfrak{f}_\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}))$$

から，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{i})},\ldots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{i})},\mathfrak{f}_1(\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{i})},\ldots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{i})}),\ldots,\mathfrak{f}_\mathfrak{s}(\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{i})},\ldots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{i})}))\qquad(\mathfrak{i}=1,\ldots,\mathfrak{m})$$

という離接節を持つ離接論理式 (3) への移行が可能となったのであった．このことから，第2 ε-定理も第1 ε-定理と同様に，考察の対象となる形式的体系 F が，本来の公理の他に，等号の公理 (J_2) を含んでいる場合に対する拡張ができそうに思える．

実際，これは，前の節での証拠を，以下のように，ほんの少し変更することで実行できる．示すべきことは，ε-記号を含まない論理式 $\mathfrak{E}$ の形式的体系 F での導出が与えられたとき，それから，ε-記号のまったく現れない証明が得られることである．ここで，まず最初に，前と同じような[12]簡略化を行うことができる．つまり，与えられた $\mathfrak{E}$ の導出では，本来の公理は用いられていないとしてよい．さらに，論理式 $\mathfrak{E}$ はスコーレム標準型の形をしており，少なくとも1つの存在記号が論理式の初めに現れるとしてよい．したがって，我々の課題は，

$$(E\mathfrak{x}_1)\ldots(E\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(\mathfrak{y}_1)\ldots(\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

[12]以下では，191–197 ページでの考察を参照．

という形をした述語論理の記号と，場合によっては，さらに幾つかの個体記号，関数記号，述語記号から成り立つ論理式 $\mathfrak{C}$ で，$\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{y}_s$ が，そこに現れる束縛変数の全てであるようなものに対し，これの導出で，述語計算，等号の公理 (J_2) と ε-論理式によるものが与えられたとき，述語計算と公理 (J_2) のみの用いられている導出を得ることができるという命題を示すことに帰着する．

このために，まず前と同じように，論理式 $\mathfrak{C}$ から述語計算により対応する論理式

$$(E\mathfrak{x}_1)\dots(E\mathfrak{x}_\mathfrak{r})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\mathfrak{f}_1(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}),\dots,\mathfrak{f}_\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}))$$

の導出を得る．ここに，この論理式 “$\mathfrak{C}_1$” の導出は，述語計算，公理 (J_2) と ε-論理式のみが用いられているようにとる．この論理式から，拡張された ε-定理[13]により，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{i})},\dots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{i})},\mathfrak{f}_1(\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{i})},\dots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{i})}),\dots,\mathfrak{f}_\mathfrak{s}(\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{i})},\dots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{i})}))$$

$(\mathfrak{i}=1,\dots,\mathfrak{m})$ という形の節で，項 $\mathfrak{t}_1^{\mathfrak{i}},\dots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{i})}$ は，ε-記号を含まないようなものを，離接節として持つ離接論理式の導出が得られる．この導出では，自由変数を持つ初等計算と，幾つかの特殊な形の等号の公理のみが用いられている．この導出を得るために用いた除去手続きにより，ここでの全ての代入は，初式に引き戻されている形に変更されているため，全ての初式は，命題計算の恒真な論理式，または，特殊な形の等号の公理から，代入により，得られるようなものになっており，終式 $\mathfrak{D}$ は，これらの初式から推論規則（と，繰り返し）のみにより得られている．

ここで，特に注意すべきことは，ここで使われる特殊な形の等号の公理は，関数記号 $\mathfrak{f}_1,\dots,\mathfrak{f}_\mathfrak{s}$ のどのパラメータにも属さないということである．なぜなら，これらの関数記号が，論理式 $\mathfrak{C}_1$ の導出の中で現れるのは，個体変数への代入の際である[14]が，これらの個体変数は，$\mathfrak{C}_1$ の導出の中で，代入により (J_2) から得られる論理式 $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\to(\mathfrak{B}(\mathfrak{a})\to\mathfrak{B}(\mathfrak{b}))$ のどれにも含まれていないからである．

ここで，$\mathfrak{G}_1,\dots,\mathfrak{G}_\mathfrak{k}$ を特殊な形の等号の公理から代入によって得られるもの

---

[13]133 ページ以降参照．

[14]192 ページでの，$\mathfrak{C}$ からの論理式 (2) の導出を参照．

とすると，演繹定理により，論理式

$$\mathfrak{G}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{G}_{\mathfrak{k}} \rightarrow \mathfrak{D}$$

は，まったく公理を用いることなく，自由変数を持つ初等計算のみにより導出できる[15]．つまり，この論理式は，命題計算の恒真な論理式への代入により得られる．このことは，また，この論理式から離接節を並べ変え，$\mathfrak{D}$ の中の離接節の繰り返しを切り捨てることによって得られる論理式についてもいえるし，さらに，ここに現れる項を他のもので置き換え，その際，初等論理式のパラメータで等しくなっているものは，置き換えの後でも等しくなっているようにしたときについても同様である．

このような操作により，前に示したとき同様に，離接節 $\mathfrak{D}$ の代わりに，

$$\mathfrak{D}^* \quad \begin{cases} \mathfrak{A}(\mathfrak{l}_1^{(1)}, \ldots, \mathfrak{l}_{\mathfrak{r}}^{(l)}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{s}}) \vee \ldots \\ \qquad\qquad \ldots \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{l}_1^{(\mathfrak{m})}, \ldots, \mathfrak{l}_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{m})}, \mathfrak{a}_{(\mathfrak{m}-1)\cdot\mathfrak{s}+1}, \ldots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{s}}) \end{cases}$$

という形をした離接節を得る．ここに，$\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{s}}$ は新しく導入された，番号付きの自由変数で，変数 $\mathfrak{a}_{(\mathfrak{i}-1)\cdot\mathfrak{s}+1}, \ldots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{s}}$ は，項 $\mathfrak{l}_1^{\mathfrak{j}}, \ldots, \mathfrak{l}_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{j})}$，$\mathfrak{j} = 1, \ldots, \mathfrak{i}$ のどれにも現れないものとなっている．

同時に，ここで行われる置き換えにより，論理式 $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_{\mathfrak{k}}$ は $\mathfrak{G}_1^*, \ldots, \mathfrak{G}_{\mathfrak{k}}^*$ に移行するとすれば，

$$\mathfrak{G}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{G}_{\mathfrak{k}} \rightarrow \mathfrak{D}$$

に代わって，

$$\mathfrak{G}_1^* \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{G}_{\mathfrak{k}}^* \rightarrow \mathfrak{D}^*$$

が現れることになり，これから，初等的な変形により，離接

$$\overline{\mathfrak{G}_1^*} \vee \ldots \vee \overline{\mathfrak{G}_{\mathfrak{k}}^*} \vee \mathfrak{D}^*$$

が得られる．これも，やはり，命題計算の恒真な論理式への代入により得られていることになる．

これらの論理式 $\mathfrak{G}_1^*, \ldots, \mathfrak{G}_{\mathfrak{k}}^*$ のおのおのは，対応する論理式 $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_{\mathfrak{k}}$ と同様に，

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \rightarrow (\mathfrak{Q}(\mathfrak{a}) \rightarrow \mathfrak{Q}(\mathfrak{b}))$$
$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \rightarrow (\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{f}(\mathfrak{b}))$$

[15]原書 I，154 ページ下参照．

という2つの形のいずれかになっている．ここに，$\mathfrak{Q}$ は，ある述語記号 $\mathfrak{f}$ は $\mathfrak{f}_1$, $\ldots, \mathfrak{f}_\mathfrak{s}$ とは異なる関数記号であり，明示された以外のパラメータを含んでいてよい（特に，$\mathfrak{Q}$ は等号であることもありうる）．

ここで，離接論理式

$$\overline{\mathfrak{G}_1^*} \vee \ldots \vee \overline{\mathfrak{G}_\mathfrak{k}^*} \vee \mathfrak{D}^*$$

に，規則 (μ), (ν)[16]を適用する．離接節 $\overline{\mathfrak{G}^*}_\mathfrak{j}$ （$\mathfrak{j} = 1, \ldots, \mathfrak{k}$）への規則 (μ) の適用の繰り返しにより，これの代わりに，特殊な形の等号の公理の否定から，自由変数を束縛変数に変えて，それに属す存在記号を論理式の初めに付け足すことで与えられる離接節 $\mathfrak{H}_\mathfrak{j}$ を得る．

そのような離接節の否定 $\overline{\mathfrak{H}_\mathfrak{j}}$ は，特殊な形の等号の公理から，自由変数を束縛変数に変えることで得られる，したがって論理式 (J_2) から述語論理により導出されるような論理式に変換できる．

全体として，規則 (μ) を離接節 $\overline{\mathfrak{G}_1^*}, \ldots, \overline{\mathfrak{G}_\mathfrak{k}^*}$ に適用することにより，

$$\overline{\mathfrak{G}_1^*} \vee \ldots \vee \overline{\mathfrak{G}_\mathfrak{k}^*} \vee \mathfrak{D}^*$$

から，論理式

$$\mathfrak{H}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{H}_\mathfrak{k} \vee \mathfrak{D}^*$$

が得られる．ここで，論理式 $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_\mathfrak{k}$ は自由変数を含まないので，規則 (ν), (μ) の $\mathfrak{D}^*$ の離接節への適用は，$\mathfrak{D}^*$ がすでに全体の論理式である場合と同じように扱うことができる．したがって，前に示したのと同じように，$\mathfrak{D}^*$ の離接節のおのおのを $\mathfrak{E}$ に変換することができて，その結果，全体として，

$$\mathfrak{H}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{H}_\mathfrak{f} \vee \mathfrak{E} \vee \ldots \vee \mathfrak{E}$$

という論理式が得られ，これは

$$\overline{\mathfrak{H}_1} \,\&\, \ldots \,\&\, \overline{\mathfrak{H}_\mathfrak{f}} \rightarrow \mathfrak{E}$$

に変形することができる．

したがって，この論理式は述語計算で導出でき，論理式 $\overline{\mathfrak{H}_1}, \ldots, \overline{\mathfrak{H}_\mathfrak{f}}$ は，すでに注意したように，(J_2) から述語計算により導出できるから，$\mathfrak{E}$ の (J_2) からの述語計算のみによる導出が得られたことになる．

---

[16]195 ページ参照．

以上により，第 2 ε-定理は，等号の公理 (J_2) を考察している体系 $\mathfrak{F}$ に加えたものに対しても成り立つことが示せた．

特に，これにより，次の定理が得られたことになる: 述語計算に等号と等号の公理 (J_1)，(J_2)，および ε-記号と ε-論理式を付け加えて得られる（拡張された意味での "論理的"）形式的体系において，ε-記号を含まない論理式が導出できるなら，ε-記号を用いずに導出を行うことができる．

したがって，述語計算の記号と変数および等号からなる論理式が，述語計算の規則と等号の公理 (J_1)，(J_2) 以外には，存在記号の記号による整約のみの用いられているような導出により導ける場合には，これらの記号による整約を導出から除去することができる．

ここで証明したことにより，一般に，述語計算，等号の公理，および幾つかの本来の公理により，存在論理式の記号による整約を加えることにより得られている論理式 $\mathfrak{E}$ の導出で，それにより導入された記号が $\mathfrak{E}$ に含まれていない場合には，その導出から記号による整約を除去することができる．

述語計算の記号と変数，さらに必要に応じて，幾つかの個体記号，関数記号，述語記号からなるが，等号は含んでいないような論理式 $\mathfrak{E}$ が，述語計算，ε-論理式，等号の公理から導出されるなら，述語計算のみから導出可能であるという定理の証拠も，第 2 ε-定理へ公理 (J_2) を付加したものに対する証明法から得られる．

この主張は，特に，論理式 $\mathfrak{E}$ の上のような導出で，述語計算と等号の公理 (J_1)，(J_2) からのものに対し，これらの等号の公理の使用が除去できるという命題も含んでいる．

この定理は，論理式 $\mathfrak{E}$ が述語計算の論理式である場合には，前にすでに証明されていた[17]．そのときの証明は，論理式 $\mathfrak{E}$ が，さらに，個体記号あるいは述語記号を含んでいる場合には，ただちに適用できたが，$\mathfrak{E}$ が関数記号も含んでいる場合には，すでに適用することができなかった．

この定理の証拠を始めるにあたって，再び，一般性を失うことなく，論理式 $\mathfrak{E}$ はスコーレム標準型の形をしているとしてよいことを注意しておく．まず，前とまったく同じように，$\mathfrak{E}$ の導出から，

$$\mathfrak{G}_1^* \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{G}_{\mathfrak{k}}^* \to \mathfrak{D}^*$$

[17] 原書 I，390–392 ページ参照．

という形の論理式で次の性質を満たすものをみつけることができる:

1. この論理式は，命題計算の恒真な式への代入により得られる．
2. 論理式 $\mathfrak{G}_1,\ldots,\mathfrak{G}_\mathfrak{k}$ のおのおのは，

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{b} \to (\mathfrak{Q}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{Q}(\mathfrak{b}))$$
$$\mathfrak{a}=\mathfrak{b} \to \mathfrak{f}(\mathfrak{a})=\mathfrak{f}(\mathfrak{b})$$

という 2 つの形のうちの 1 つとなっている．ここに，$\mathfrak{Q}$ は，ある述語記号，$\mathfrak{f}$ は関数記号で，明記された以外のパラメータを含んでいてよく，これらのパラメータは，$\mathfrak{Q}(\mathfrak{a})$ と $\mathfrak{Q}(\mathfrak{b})$ で，あるいは，$\mathfrak{f}(\mathfrak{a})$ と $\mathfrak{f}(\mathfrak{b})$ で等しくなっているものとする．

3. 論理式 $\mathfrak{D}^*$ からは，述語論理のみにより，$\mathfrak{E}$ に戻ることができる．

さらに，論理式 $\mathfrak{D}^*$ の $\mathfrak{E}$ に対する関係から，$\mathfrak{E}$ と同様に，$\mathfrak{D}^*$ も等号を含まないものとなる．これは，$\mathfrak{E}$ は

$$(E\,\mathfrak{x}_1)\ldots(E\,\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(\mathfrak{y}_1)\ldots(\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

という形をしていて，$\mathfrak{D}^*$ は，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

の変数 $\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s}$ を適当な項で置き換えることによって得られるような離接節を持った離接論理式となっているからである．

性質 1 は，論理式

$$\mathfrak{G}_1^* \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{G}_\mathfrak{k}^* \to \mathfrak{D}^*$$

に現れる等式で，両辺の項が同じ形態をしているものを $A \vee \overline{A}$ で置き換え，他の等式を $A \,\&\, \overline{A}$ で置き換えても保たれる．これにより，少なくとも同じ初等論理式に対しては，同じ置き換えがなされているからである．

この置き換えにより，論理式

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{b} \to (\mathfrak{Q}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{Q}(\mathfrak{b})),$$

または，

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{b} \to \mathfrak{f}(\mathfrak{a})=\mathfrak{f}(\mathfrak{b})$$

は，項 $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ の形態が異なるなら，

$$A \,\&\, \overline{A} \to \mathfrak{B}$$

という形の論理式に変換され，項 $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ が等しいなら，

$$A \vee \overline{A} \to (\mathfrak{C} \to \mathfrak{C})$$

または，

$$A \vee \overline{A} \to A \vee \overline{A}$$

という形の論理式に変換される．これにより，$\mathfrak{G}_j^*$ $(\mathrm{j} = 1, \ldots, \mathfrak{k})$ のおのおのから，命題計算の恒真な論理式への代入によって生じる論理式 $\tilde{\mathfrak{G}_j}$ が得られ，一方 $\mathfrak{D}^*$ は変化しない．

これによって得られる論理式

$$\tilde{\mathfrak{G}_1} \,\&\, \ldots \,\&\, \tilde{\mathfrak{G}_\mathfrak{k}} \to \mathfrak{D}^*,$$

および論理式 $\tilde{\mathfrak{G}_1}, \ldots, \tilde{\mathfrak{G}_\mathfrak{k}}$ は命題計算の恒真な論理式への代入により生じているから，$\mathfrak{D}^*$ についても同じことがいえる．ところが，$\mathfrak{D}^*$ からは，述語計算により，論理式 $\mathfrak{E}$ が得られるのであったから，主張していたように，$\mathfrak{E}$ は述語計算のみから得られることが示せた．

ここで証明された定理は，ただちに，次のように一般化できる．等号の公理 (J_1)，(J_2) と，等号を含まない本来の公理からなる公理系から述語計算により，等号を含まない論理式 $\mathfrak{E}$ が導出されているとき，この導出から等号の公理を除去することができる．

ε-記号に，ι-記号の役割を負わせることにで，ε-論理式の導入により，ι-規則は，導出可能な規則となる[18]から，拡張された第 2 ε-定理からは，ι-規則の除去可能性の定理[19]を得ることもできる．ただし，このようにして得られる ι-規則の除去可能性の証明は，述語計算から，ι-規則の他に，幾つかの本来の公理と，必要なら等号の公理 (J_2) を加えることで得られるような形式的体系にしか適用することができない．これに対し，以前では，この定理は完全帰納法も加わったものに対して証明されていたのであった．

公理系 (Z) の体系は，帰納法の公理を含んでいるわけだが，ここでは，逆に，第 2 ε-定理の命題は，ι-規則の除去可能性の定理から導き出すことができ

[18] 60 ページ参照．

[19] 原書 I，431–432 ページ参照．

る．なぜなら，すでに示したように[20]，この体系では ι-規則を付加することにより，

$$A(a) \rightarrow A(\mu_x A(x))$$

が，ι-規則から導出できるように，記号 $\mu_x A(x)$ を定義することができるからである．

したがって，形式的体系 (Z) に属す論理式 $\mathfrak{E}$ が，述語計算と (Z) の公理に，ε-記号と ε-論理式を加えたものから導き出されているとき，ここでの ε-記号と ε-論理式の適用は，ι-規則で置き換えることができる．$\mathfrak{E}$ は ι-記号を含まないから，この ι-規則の使用は，先に述べた ι-規則の除去可能性の定理により取り除くことができる．これにより，$\mathfrak{E}$ の (Z) の公理からの導出で，述語計算のみでなされているようなものが得られた[21]．

ι-規則の除去可能性が，第 2 ε-定理から導かれている場合には，もちろん，ι-規則の代わりに，直接 ε-論理式を用いることができる．例として，**関数記号の述語記号による置き換え**の問題について述べておこう．これは，以前には，ι-記号の除去可能性定理を用いて取り扱ったのであった[22]．以下の考察は，そこで，完全帰納法が考察の対象に含まれていないという点では，考察の領域が狭められているが，これに対し，ここでの考察では，前とは違って，形式的体系は必ずしも等号の公理を含んでいなくてもよい．

述語計算に，等号と等号の公理 (J_1)，(J_2)，その他の幾つかの記号，個体記号，関数記号，述語記号，および本来の公理 $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ を付け加えて得られる形式的体系 F から出発する．これらの記号のうちには，関数記号

$$\mathfrak{f}_1(a_1, \ldots, a_{\mathfrak{k}_1}), \ldots, \mathfrak{f}_\mathfrak{m}(a_1, \ldots, a_{\mathfrak{k}_\mathfrak{m}})$$

が含まれているとする．

F での関数記号に述語記号

$$\mathfrak{P}_1(b, a_1, \ldots, a_{\mathfrak{k}_1}), \ldots, \mathfrak{P}_\mathfrak{m}(b, a_1, \ldots, a_{\mathfrak{k}_\mathfrak{m}})$$

を対応させ，顕現的定義

---

[20] 原書 I，403 ページ下から 405 ページ，あるいは第 2 章を参照．

[21] これに関しては，前に 60 ページで述べた注意を参照．

[22] 原書 I，455–458 ページ参照．

$$\{1\} \qquad \mathfrak{P}_{\mathfrak{i}}(b, a_1 \ldots, a_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{i}}}) \sim b = \mathfrak{f}_{\mathfrak{i}}(a_1, \ldots, a_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{i}}}) \qquad (\mathfrak{i} = 1, \ldots, \mathfrak{m})$$

を加えることにより，拡張された形式的体系 F_1 を得る．F から F_1 への拡張は，顕現的に定義された記号のみによるものであるから，本質的なものではない．特に，F が無矛盾なら，F_1 も無矛盾である．$\{1\}$ から，等号の公理により，論理式

$$\{2\} \quad \begin{cases} (Ex)\mathfrak{P}_{\mathfrak{i}}(x, a_1, \ldots, a_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{i}}}) \\ \mathfrak{P}_{\mathfrak{i}}(b, a_1, \ldots, a_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{i}}}) \,\&\, \mathfrak{P}_{\mathfrak{i}}(c, a_1, \ldots, a_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{i}}}) \to b = c \end{cases} \qquad (\mathfrak{i} = 1, \ldots, \mathfrak{m})$$

および同値論理式

$$\{3\} \quad A(\mathfrak{f}_{\mathfrak{i}}(a_1, \ldots, a_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{i}}})) \sim (x)(\mathfrak{P}_{\mathfrak{i}}(x, a_1 \ldots, a_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{i}}}) \to A(x)) \quad (\mathfrak{i} = 1, \ldots, \mathfrak{m})$$

が導出可能となる．同値論理式 $\{3\}$ により，形式的体系 F_1 での全ての論理式 $\mathfrak{C}$ は関数記号を含まないような論理式 $\mathfrak{C}^*$ と同値になる．

特に，公理 $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{\mathfrak{n}}$ は，関数記号の用いられていない論理式 $\mathfrak{A}_1^*, \ldots, \mathfrak{A}_{\mathfrak{n}}^*$ と同値になる．このような論理式 $\mathfrak{A}_1^*, \ldots, \mathfrak{A}_{\mathfrak{n}}^*$ が，すでに求まっているものとする．ここで，$\mathfrak{C}$ を F_1 で導出される論理式として，$\mathfrak{C}^*$ を関数記号を含まない論理式で $\mathfrak{C}$ と同値になるものとする．このときには，また，$\mathfrak{C}^*$ は論理式 $\mathfrak{A}_1^*, \ldots, \mathfrak{A}_{\mathfrak{n}}^*$ と論理式 $\{1\}$ から，述語計算と等号の公理により導出される．そのような導出では，一般には関数記号が現れることもありうる．しかし，これから示すように，(形式的体系 F_1 で導出できる）論理式 $\{2\}$ が，公理として付け加えることにより，関数記号を除去することができる．

これは，以下のように示せる．関数記号を含まない体系 F の論理式 $\mathfrak{C}^*$ の $\mathfrak{A}_1^*, \ldots, \mathfrak{A}_{\mathfrak{k}}^*$ と論理式 $\{1\}$ からの導出で，述語計算と等号の公理 (J_1)，(J_2) により得られているものから出発して，まず，ε-記号と ε-論理式を導入して，全ての

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{i}}(a_1, \ldots, a_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{i}}})$$

という形の表現を

$$\varepsilon_x \mathfrak{P}(x, a_1 \ldots, a_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{i}}}), \qquad \text{または} \qquad \varepsilon_{\mathfrak{v}} \mathfrak{P}(\mathfrak{v}, a_1 \ldots, a_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{i}}})$$

で置き換える（ここに，束縛変数の選択の余地が残されているのは，束縛変数の衝突が避けられるようにである.）ことにより，関数記号 $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_{\mathfrak{m}}$ を，外見上除去できる．

この際に，論理式 {1} は，論理式

$$\{4\} \qquad \mathfrak{P}_{\mathfrak{i}}(b, a_1 \ldots, a_{\mathfrak{k}}) \sim b = \varepsilon_x \mathfrak{P}_{\mathfrak{i}}(x, a_1, \ldots, a_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{i}}})$$

$(i = 1, \ldots, \mathfrak{m})$ に移行するが，これは，論理式 {2} から述語計算，ε-論理式，および等号の公理 (J_2) により導出できる．

これにより，論理式 $\mathfrak{C}^*$ の，$\mathfrak{A}_1^*, \ldots, \mathfrak{A}_{\mathfrak{k}}^*$，論理式 {2}，および等号の公理からの述語計算と ε-論理式による導出が得られた．論理式 {2}，ならびに論理式 $\mathfrak{A}_1^*, \ldots, \mathfrak{A}_{\mathfrak{k}}^*$ は，論理式変数も ε-記号も含んでいないので，第 2 ε-定理により，この導出から ε-k 記号を除去することができて，$\mathfrak{E}^*$ の，$\mathfrak{A}_1^*, \ldots, \mathfrak{A}_{\mathfrak{k}}^*$，$(J_1)$，$(J_2)$，および論理式 {2} による述語計算での導出が得られる．

したがって，F において，論理式 $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{\mathfrak{k}}$ の代わりに論理式 $\mathfrak{A}_1^*, \ldots, \mathfrak{A}_{\mathfrak{k}}^*$ を採用し，{2} を公理としてとり，関数記号 $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_{\mathfrak{m}}$ を除去することで得られる形式的体系（ただし，等式の公理 (J_1)，(J_2) はそのままになっている）を，F^* で表すことにすれば，次の定理が成り立つ．形式的体系 F の任意の論理式 $\mathfrak{C}$ に対し，F^* の論理式 $\mathfrak{C}^*$ で，同値論理式 {3} により，つまり，F_1 で $\mathfrak{C}$ と同値になるものがとれる．さらに，論理式 $\mathfrak{C}$ が F で導出できる場合には，上のような任意の $\mathfrak{C}^*$ も F^* で導出できる．

逆に，$\mathfrak{C}^*$ が F^* で導出できる場合には，$\mathfrak{C}$ も F から導出できるようになっている．

つまり，形式的体系 F^* での $\mathfrak{C}^*$ の導出で，全ての

$$\mathfrak{P}_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{b}, a_1, \ldots, a_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{i}}})$$

という表現を，等式

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{f}_{\mathfrak{i}}(a_1, \ldots, a_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{i}}})$$

で置き換えることにより，述語記号 $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{i}}}$ の代わりに，再び，関数記号 $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_{\mathfrak{m}}$ が導入されるが，これにより得られる証明図は，補足を加えれば，$\mathfrak{F}$ での $\mathfrak{C}$ の証明にすることができる．つまり，上の置き換えにより，論理式 $\mathfrak{C}^*$ が $\mathfrak{C}^{**}$ に移行し，公理 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}}^*$ のおのおのが $\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}}^{**}$ に移行するとする．この際，等号の公理は変化せず，論理式 {2} は (J_1)，(J_2) から導出できるものに移行する．まず，これにより，論理式 $\mathfrak{C}^{**}$ の，論理式 $\mathfrak{A}_1^{**}, \ldots, \mathfrak{A}_{\mathfrak{n}}^{**}$，$(J_1)$，$(J_2)$ からの述語計算での導出が得られる．さらに，論理式 {3} により同値論理式

$$\mathfrak{C} \sim \mathfrak{C}^*, \qquad \mathfrak{A}_1 \sim \mathfrak{A}_1^*, \ldots, \mathfrak{A}_{\mathfrak{n}} \sim \mathfrak{A}_{\mathfrak{n}}^*$$

が述語計算により導出可能になる．これらの同値論理式の導出の全てにおいて，$\mathfrak{P}_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{i}}})$ という表現を，対応する等式 $\mathfrak{b} = \mathfrak{f}_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{i}}})$ で書き換えれば，これらの導出の終式は

$$\mathfrak{C} \sim \mathfrak{C}^{**}, \qquad \mathfrak{A}_1 \sim \mathfrak{A}_1^{**}, \ldots, \mathfrak{A}_{\mathfrak{n}} \sim \mathfrak{A}_{\mathfrak{n}}^{**}$$

となり，論理式 $\{3\}$ は等号の公理から導出可能な論理式に移行する．したがって，論理式

$$\mathfrak{C} \sim \mathfrak{C}^{**}, \qquad \mathfrak{A}_1 \sim \mathfrak{A}_1^{**}, \ldots, \mathfrak{A}_{\mathfrak{n}} \sim \mathfrak{A}_{\mathfrak{n}}^{**}$$

の，述語計算と等号の公理 (J_1)，(J_2) による導出が得られ，この導出を，前に得られていた，$\mathfrak{C}^{**}$ の $\mathfrak{A}_1^{**},\ldots,\mathfrak{A}_{\mathfrak{n}}^{**}$，$(J_1)$，$(J_2)$ からの導出と組み合わせることで，$\mathfrak{C}$ の，公理 $\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_{\mathfrak{n}}$，$(J_1)$，$(J_2)$ からの述語計算による，したがって，形式的体系 F での導出が得られる．

以上により，形式的体系 F での導出と，形式的体系 F^* での導出の対応が確立したことになる: まず，F の任意の論理式は，顕現的定義 $\{1\}$ と等号の公理により，$\mathfrak{F}^*$ の論理式と同値になる．逆に，F^* の任意の論理式からは，そこに現れる表現 $\mathfrak{P}_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{f}_{\mathfrak{i}}})$ の全てを対応する等式 $\mathfrak{b} = \mathfrak{f}_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{f}_{\mathfrak{i}}})$ で置き換えることにより，論理式 $\{1\}$，および等号の公理により，この論理式と同値になるような，F の論理式が得られる．さらに，F の論理式 $\mathfrak{C}$ が，F^* の論理式 $\mathfrak{C}^*$ と，論理式 $\{1\}$ と等号の公理により，同値になるときには，$\mathfrak{C}$ の F での導出から $\mathfrak{C}^*$ の F^* での導出が得られ，この逆も成り立つ．

形式的体系 F での導出可能性に関する考察は，これにより，F^* での導出可能性に帰着される．形式的体系 F^* は，しかし，それが関数記号を含んでいないという意味で特殊な形のものとなっている．

したがって，1階の形式的公理系で等号の公理 (J_1)，(J_2) を含んでいるものの，証明論的な考察は，常にそのような体系で，関数記号の現れないものに関する考察に帰着されるということが，再度，結論されたことになる．

この結果で，考察される形式的体系が等号の公理 (J_1)，(J_2) を含んでいなくてはならないという限定条件が気になるが，前に証明した等号の公理の除去に関する定理[23]により，与えられた形式的体系が等号をまったく含まないか，あ

---

[23]202–204 ページ参照．

るいは，この形式的体系は等号を含むが，本来の公理のみを含み，公理 (J_2) は含まれない場合についても，対応する結果が得られる．

まず，最初の場合を考えてみよう．ある形式的体系 F_0 で，述語計算に幾つかの記号（個体記号，関数記号，述語記号），ならびに幾つかの本来の公理 $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mathfrak{n}$ を付加して得られるものが与えられたとしよう．これらの記号の中には，等号は含まれないが，幾つかの関数記号

$$\mathfrak{f}_\mathfrak{i}(a_1, \ldots, a_{\mathfrak{k}_\mathfrak{i}}) \qquad (\mathfrak{i} = 1, \ldots, \mathfrak{m})$$

は含まれているものとする．このとき，まず，等号と公理 (J_1)，(J_2) を F_0 に付け加えて，上で考察していたような体系 F を得る．これから，前に述べたような方法により，関数記号を含まないような形式的体系 F^* を得ることができる．F_0 の全ての論理式 $\mathfrak{C}$ は，同値論理式 $\{3\}$ により，F^* の論理式 $\mathfrak{C}^*$ と同値になり，$\mathfrak{C}$ の F での導出からは，$\mathfrak{C}^*$ の F^* での導出が得られる．さらに，これの逆も成り立つ．つまり，F^* での $\mathfrak{C}^*$ の導出からは，まず $\mathfrak{C}$ の F での導出，つまり，$\mathfrak{C}$ の公理 $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mathfrak{n}$ からの述語計算と等号の公理 (J_1)，(J_2) による導出が得られる．ところが，論理式 $\mathfrak{C}$ も 公理 $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mathfrak{n}$ も，全て F_0 に属し，したがって等号を含まないから，すでに証明したように，この導出から等号の公理を（それらが使われている最初のところで）除去することができて，これにより，$\mathfrak{C}$ の F_0 での導出が得られる．

このようにして，F_0 での導出可能性に関する考察は，関数記号を含まない形式的体系 F^* における導出可能性に関する考察に帰着された．

残りは，等号を含むが，これに関しては本来の公理のみであるような，つまり公理 (J_2) を含まないような形式的体系の場合について考察すればよい．この場合は，等号の代わりに，何か別の記号，例えば，“$Id(a, b)$” を用いることで，上で考察したことに帰着させることができる．この記号に対しては，本来の公理が与えられているのみであるので，他の述語記号とまったく対等なものとなるから，これにより等号を含まない形式的体系 F_0 が得られる．これに対応する形式的体系 F^* では，記号 $=$ と Id の両方が現れ，$=$ に対しては，公理 (J_1)，(J_2) が，一方 Id に対しては，それに関する，前に $\mathfrak{A}_1^*, \ldots, \mathfrak{A}_\mathfrak{n}^*$ と呼んだ本来の公理が用いられることになる．

これにより，関数記号を持つ形式化された公理系で，等号がまったく現れないか，あるいは，等号は本来の公理のみを伴って現れているときには，論理式

の導出可能性に関する考察は，対応する関数記号を持たない公理系での，論理式の導出可能性に関する考察に帰着されることがわかった[24].

ここで取り扱った関数記号を持つ公理系の，関数記号を持たない公理系への帰着に関する証明論的考察は，関数記号を持たない 1 階の公理系において，論理式の導出可能性の問題は，純粋な述語計算による導出可能性の問題に帰着されるという事実のもとで重要性を持つことになる．これが，どのようにして起こっていたかを，手短かに復習しておこう．まず，考察している公理系の形式的体系に属す任意の論理式の導出可能性の問題は，論理式変数を持たない論理式の導出可能性に帰着させることができる[25]．このような論理式の導出可能性については，等号の公理 (J_2) は本来の公理で置き換え，導出は，(述語計算により）本来の公理のみからなされているようにすることができる．ここで，$\mathfrak{F}$ を導出される論理式として，$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}$ を本来の公理の自由変数を束縛変数で置き換えることにより得られた論理式とすると，ここで考察している導出は，論理式

$$\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_\mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{F}$$

の述語計算のみによる導出と同等なものとなる．この論理式には，仮定により，個体記号と述語記号以外の記号は現れないから，これの導出可能性は，この論理式に現れる個体記号をまだ使われていない個体変数で置き換え，述語記号を論理式変数で置き換えることにより得られる純粋な述語計算での論理式の導出可能性と同じになる．

同様にして，(述語計算で記述された推論法の枠組み内での）この公理系の無矛盾性は，論理式

$$\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_\mathfrak{f}$$

の否定から，上で述べた個体記号と述語記号の置き換えにより得られる論理式の導出の不可能性と同じになる．

このような，公理系からの導出可能性や，公理系の無矛盾性の問題を，述語計算のみに対する導出可能性の問題へ還元する手法は，関数記号の述語記号に

[24] ただし，ここでは，公理系は公理 (J_2) を含んでいるが，(J_1) は含んでおらず，この体系での (J_1) の導出もされないというような場合は含まれていない．しかし，このような場合は，数理論理学の応用において大きな意味は持たないであろう．

[25] 64 ページ，および原書 I，390 ページでのこれに関する注意を参照.

よる置き換えの可能性に関する定理により，関数記号を含む公理系に対しても拡張できる．

他方，関数記号の除去が，導出可能性の考察にとって常に有利に働くとは限らないことを注意しておこう．むしろ，純粋な述語計算における導出を考察する際に，関数記号を導入することを余儀なくされる局面の方が多いのである．

ここに挿入された考察は，ひとまずここで終えることにして，再び，我々の主要な論考に立ち戻ろう．

5.3 エルブランの定理

第 2 ε-定理の証明からの帰結は，この定理の命題にとどまらない．実際，この証明により，ε-記号の現れない論理式の導出から（第 2 ε-定理において仮定した条件のもとで）ε-記号を完全に除去できることの可能性が明らかになったのみでなく，同時に，ε-記号に対する操作との関連を離れても重要な，特別な種類の導出可能性が得られているのである．

この結果を，応用に適す形にするためには，第 2 ε-定理の証拠[26]での考察から，スコーレム標準型の使用を除くことが望ましい[27]．

このために，そこでの思考の過程を，もう 1 度たどってみよう．ただし，

$$(E\,\mathfrak{x}_1)\ldots(E\,\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(\mathfrak{y}_1)\ldots(\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

という特別な形をしている論理式 $\mathfrak{E}$ の代わりに，任意の冠頭型の論理式を用いる．これによりもたらされる変更をみるには，特徴的な例で考察を行えば十分である．このようなものとして，

$$(E\,t)(x)(y)(E\,u)(E\,v)(z)(E\,w)\mathfrak{A}(t,x,y,u,v,z,w)$$

という形の論理式で，明示された変数以外には束縛変数の現れないものを考える．

この論理式 “$\mathfrak{E}$” は，変数と論理記号以外にも個体記号，関数記号，述語記号を含んでいる可能性があるが，これが，述語計算で公理は使用せずに，しかし，

---

[26] 190 ページ以降参照．

[27] あるいは，考察している論理式に対するスコーレム標準型を最終結果でもとに戻すという方法もあるが，全体としては，このようにしても議論の簡略化にはならない．

場合によっては，他の個体記号，関数記号，述語記号を用いて導出されているとする．また，$\mathfrak{C}$ には，関数記号 φ，ψ，χ は現れないとする．

まず，論理式

$$\mathfrak{C} \to (E\,t)(E\,u)(E\,v)(E\,w)\mathfrak{A}(t, \varphi(t), \psi(t), u, v, \chi(t, u, v), w)$$

を導出する．これを得るためには，述語計算の基本論理式 (a)，ならびに，代入と規則 (ζ)[28]により得られる論理式

(1) $$(E\,t)(x)(y)A(t, x, y) \to (E\,t)A(t, \varphi(t), \psi(t)),$$

(2) $$(E\,t)(E\,u)(E\,v)(z)A(t, u, v, z) \to (E\,t)(E\,u)(E\,v)A(t, u, v, \chi(t, u, v))$$

から出発する．論理式 (1) の代入型 $A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$（ここに $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$，$\mathfrak{c}$ は $\mathfrak{C}$ に現れない自由変数とする）に，論理式

$$(E\,u)(E\,v)(z)(E\,w)\mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, u, v, z, w)$$

を代入することで，論理式

(3) $$\mathfrak{C} \to (E\,t)(E\,u)(E\,v)(z)(E\,w)\mathfrak{A}(t, \varphi(t), \psi(t), u, v, z, w)$$

が得られる．一方，(2) で代入型 $A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$（ここに，$\mathfrak{d}$ は，$\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$，$\mathfrak{c}$ と異なる $\mathfrak{C}$ に現れない自由変数とする）に，論理式

$$(E\,w)\mathfrak{A}(\mathfrak{a}, \varphi(\mathfrak{a}), \psi(\mathfrak{a}), \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, w)$$

を代入することで，

$$\begin{aligned}&(E\,t)(E\,u)(E\,v)(z)(E\,w)\mathfrak{A}(t, \varphi(t), \psi(t), u, v, z, w)\\ &\qquad \to (E\,t)(E\,u)(E\,v)(E\,w)\mathfrak{A}(t, \varphi(t), \psi(t), u, v, \chi(t, u, v), w)\end{aligned}$$

が得られ，この論理式と，論理式 (3) から，連鎖推論により，求めていた論理式

(4) $$\mathfrak{C} \to (E\,t)(E\,u)(E\,v)(E\,w)\mathfrak{A}(t, \varphi(t), \psi(t), u, v, \chi(t, u, v), w)$$

が得られる．この論理式 (4) の導出と，与えられていた $\mathfrak{C}$ の導出により，述語計算による，論理式

(5) $$(E\,t)(E\,u)(E\,v)(E\,w)\mathfrak{A}(t, \varphi(t), \psi(t), u, v, \chi(t, u, v), w)$$

---

[28]原書 I，134 ページ参照．

の導出が得られる．

第 1 ε-定理の拡張[29]により，この論理式 (5) の導出から，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{q}, \varphi(\mathfrak{q}), \psi(\mathfrak{q}), \mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \chi(\mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s}), \mathfrak{t})$$

という形の離接節を持つ離接論理式の導出が得られる．ただし，ここに，$\mathfrak{q}$，$\mathfrak{r}$，$\mathfrak{s}$，$\mathfrak{t}$ は自由変数，個体記号，関数記号からなる項で，この導出は，公理を用いずに初等計算の中で行われている．したがって，この離接論理式は，命題計算の恒真な論理式への代入により得られている，つまり命題論理で真なものとなっている[30]．

この結果は，以下のより発見法的な考察によって得ることもできる[31]．

$\mathfrak{E}$ の導出からは，任意の論理式 $\mathfrak{U}$ に対する，含意論理式

$$\overline{\mathfrak{E}} \to \mathfrak{U}$$

の導出が得られる．ここで $\mathfrak{U}$ として，量化詞を含まない論理式で，その否定が命題論理で真になるもの，つまり恒真な論理式への代入により得られるようなものをとる[32]．例えば，ある初等論理式 $\mathfrak{P}$ に対し，$\mathfrak{P} \,\&\, \overline{\mathfrak{P}}$ という形の論理式をとればよい．とりあえず，$\mathfrak{E}$ は自由変数を含まないものとしておく．

$\mathfrak{E}$ の否定は，

$$(t)(E\,x)(E\,y)(u)(v)(E\,z)(w)\overline{\mathfrak{A}(t, x, y, u, v, z, w)}$$

という形に変形できる．

この論理式 “$\mathfrak{E}_1$” から $\mathfrak{U}$ が導出されるわけである．論理式 $\mathfrak{E}_1$ に記号による整約の手続きを適用する[33]．これにより，互いに異なる自由変数，例えば，a，b，c，d，1 変数関数記号 φ，ψ，および 3 変数関数記号 χ を選び——この際，これらの関数記号は $\mathfrak{E}$ の中に現れないもののうちからとる——量化詞を含まない論理式 “$\mathfrak{E}_2$”:

$$\overline{\mathfrak{A}(a, \varphi(a), \psi(a), b, c, \chi(a, b, c), d)}$$

---

[29]80 ページ参照．

[30]第 2 章，27 ページ参照．

[31]この考察のアイデアはシュテニウス (ERIK STENIUS) による．

[32]第 2 章，27 ページ参照．

[33]49–50 ページ参照．

を得る．この論理式からは，論理式 $\mathfrak{E}_1$ が述語計算により再び得られるから，この論理式から $\mathfrak{U}$ が導出可能となる．

$\mathfrak{U}$ の $\mathfrak{E}_2$ からの導出では，束縛変数は初式にも終式にも含まれていない．したがって，第 1 ε-定理から導いた初等計算での導出の定理により[34]，論理式 $\mathfrak{U}$ は，すでに，自由変数を持つ初等計算により，$\mathfrak{E}_2$ から導出できる．このような導出で，さらに，証明図の証明系への分解により，代入を初式に引き戻すことができる[35]．このとき，初式 $\mathfrak{E}_1$ の代わりに，この論理式の幾つかの “代入体”，つまり $\mathfrak{E}_2$ から自由個体変数へ項を代入することで得られるような論理式，したがって，

$$\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{q}_\mathfrak{i}, \varphi(\mathfrak{q}_\mathfrak{i}), \psi(\mathfrak{q}_\mathfrak{i}), \mathfrak{r}_\mathfrak{i}, \mathfrak{s}_\mathfrak{i}, \chi(\mathfrak{q}_\mathfrak{i}, \mathfrak{r}_\mathfrak{i}, \mathfrak{s}_\mathfrak{i}), \mathfrak{t}_\mathfrak{i})} \qquad (\mathfrak{i} = 1, 2, \ldots, \mathfrak{n})$$

という形をした論理式が得られる．これらを略して $\overline{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}_\mathfrak{n}$ と呼ぶことにしよう．さて，これらの論理式から，$\mathfrak{U}$ は命題計算のみにより導出できる．したがって，演繹定理により，論理式

$$\overline{\mathfrak{A}}_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \overline{\mathfrak{A}}_\mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{U}$$

が，公理をまったく用いず命題計算のみにより導出可能となり，したがって，命題論理で真である．

したがって，同じことが，

$$\overline{\mathfrak{U}} \rightarrow \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_\mathfrak{n}$$

についても言える．ところが，$\overline{\mathfrak{U}}$ は命題論理で真であるから，

$$\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_\mathfrak{n}$$

も命題論理で真となる．ここに，$\mathfrak{A}_\mathfrak{i}$ $(\mathfrak{i} = 1, \ldots, \mathfrak{n})$ は論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{q}_\mathfrak{i}, \varphi(\mathfrak{q}_\mathfrak{i}), \psi(\mathfrak{q}_\mathfrak{i}), \mathfrak{r}_\mathfrak{i}, \mathfrak{s}_\mathfrak{i}, \chi(\mathfrak{q}_\mathfrak{i}, \mathfrak{r}_\mathfrak{i}, \mathfrak{s}_\mathfrak{i}), \mathfrak{t}_\mathfrak{i})$ である．したがって，この離接論理式は，命題計算の真な論理式への代入によって得られるものとなっている．

ここで，再び，論理式 $\mathfrak{E}$ が自由変数を含んでいないという前提条件をはずすことができる．実際，$\mathfrak{E}$ が自由変数を含んでいる場合には，これから第 1 ε-定理の証明の際にすでに行ったようなやり方[36]で，自由個体変数を個体記号で置

[34] 63 ページ参照．

[35] 65 ページ参照．ここでは，全ての変数を除去する必要はない．

[36] 63–64 ページ参照．

き換え，自由論理式変数を述語記号で置き換えて得られる論理式 $\mathfrak{E}^*$ と演繹的に同値となる．論理式 $\mathfrak{E}^*$ に属す離接論理式 $\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_\mathfrak{n}$ で，再び，先に導入された個体記号と述語記号を対応する変数で置き換えることができ，この際，この置き換えの後でも，離接論理式は，恒真な論理式から代入により得られたものとなっている．

ここで確立された，述語計算で導出可能な論理式 $\mathfrak{E}$ と，それから得られた命題計算で真の離接論理式の関係に対し，次のような逆の関係も成り立つ．

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A}(\mathfrak{q}_1, \varphi(\mathfrak{q}_1), \psi(\mathfrak{q}_1), \mathfrak{r}_1, \mathfrak{s}_1, \chi(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{s}_1), \mathfrak{t}_1) \vee \\ &\qquad \ldots \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{q}_\mathfrak{n}, \varphi(\mathfrak{q}_\mathfrak{n}), \psi(\mathfrak{q}_\mathfrak{n}), \mathfrak{r}_\mathfrak{n}, \mathfrak{s}_\mathfrak{n}, \chi(\mathfrak{q}_\mathfrak{n}, \mathfrak{r}_\mathfrak{n}, \mathfrak{s}_\mathfrak{n}), \mathfrak{t}_\mathfrak{n})\end{aligned}$$

という形をした離接論理式 $\mathfrak{D}$ が命題計算の恒真な論理式から代入により得られているとき，論理式 $\mathfrak{E}$ は述語計算で導出可能である．

これには，まず，$\mathfrak{D}$ に現れる項について，関数記号 φ，ψ，χ がその中に現れる数を“重複度”として定義する．さらに，項

$$\varphi(\mathfrak{q}_\mathfrak{i}), \qquad \psi(\mathfrak{q}_\mathfrak{i}), \qquad \chi(\mathfrak{q}_\mathfrak{i}, \mathfrak{r}_\mathfrak{i}, \mathfrak{s}_\mathfrak{i}) \qquad\qquad (\mathfrak{i} = 1, \ldots, \mathfrak{n})$$

を，同じ項の重複を避けて，先に行くにしたがって，重複度が減少しないような順番に並べたものを，

$$\mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_\mathfrak{p}$$

とする．

さて，同様に添数づけされた変数で，$\mathfrak{D}$ に現れていないものを $a_1, \ldots, a_\mathfrak{p}$ とする．ここで，$\mathfrak{D}$ での項 $\mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_\mathfrak{p}$ をそれぞれ変数 $a_1, \ldots, a_\mathfrak{p}$ で，このような項が $\mathfrak{D}$ で他の $\mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_\mathfrak{p}$ の部分として現れていないような全ての場所で置き換える．これにより，論理式 $\mathfrak{D}$ は，再び，命題計算で真の論理式 $\mathfrak{D}_1$ に移行する．なぜなら，すぐにわかるように，このような置き換えによって，2つの初等論理式がたまたま同一だったとき，その同一性は保たれるからである．

この離接論理式 $\mathfrak{D}_1$ は

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{b}_1, a_{\mathfrak{h}_1}, a_{\mathfrak{l}_1}, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, a_{\mathfrak{z}_1}, \mathfrak{e}_1) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{b}_\mathfrak{n}, a_{\mathfrak{h}_\mathfrak{n}}, a_{\mathfrak{l}_\mathfrak{n}}, \mathfrak{c}_\mathfrak{n}, \mathfrak{d}_\mathfrak{n}, a_{\mathfrak{z}_\mathfrak{n}}, \mathfrak{e}_\mathfrak{n})$$

という形になる．ここに，$\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_\mathfrak{n}$，$\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_\mathfrak{n}$，$\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_\mathfrak{n}$ は $1, \ldots, \mathfrak{p}$ の中の添数の1つで，次の“添数条件”を満たすもとなっている．

1. $(1,\ldots,\mathfrak{p}$ の中の添数 $\mathfrak{i}$ に対し) 変数 $a_{\mathfrak{i}}$ が，項 $\mathfrak{b}_{\mathfrak{j}}$ に現れるとき，添数 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{j}}$, $\mathfrak{l}_{\mathfrak{j}}$，$\mathfrak{z}_{\mathfrak{j}}$ は，$\mathfrak{i}$ より大きい．変数 $a_{\mathfrak{i}}$ が項 $\mathfrak{c}_{\mathfrak{j}}$ あるいは，$\mathfrak{d}_{\mathfrak{j}}$ に現れるとき，添数 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{j}}$ は $\mathfrak{i}$ より大きい．

2. 添数 $\mathfrak{h}_1,\ldots,\mathfrak{h}_{\mathfrak{n}}$ は，全ての添数 $\mathfrak{l}_{\mathfrak{i}}$ $(\mathfrak{i}=1,\ldots,\mathfrak{n})$ と異なり，全ての添数 $\mathfrak{l}_1$, $\ldots,\mathfrak{l}_{\mathfrak{n}}$ は，どの $\mathfrak{z}_{\mathfrak{j}}$ とも異なる．

3. 添数 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{i}}$ が $\mathfrak{h}_{\mathfrak{j}}$ と等しくなり，$\mathfrak{l}_{\mathfrak{i}}$ も $\mathfrak{l}_{\mathfrak{j}}$ と等しくなるのは，$\mathfrak{b}_{\mathfrak{i}}$ と $\mathfrak{b}_{\mathfrak{j}}$ が等しくなるちょうどそのときに限る．添数 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{i}}$ が $\mathfrak{z}_{\mathfrak{j}}$ と等しくなるのは，$\mathfrak{b}_{\mathfrak{i}}$ が $\mathfrak{b}_{\mathfrak{j}}$ と，$\mathfrak{c}_{\mathfrak{i}}$ が $\mathfrak{c}_{\mathfrak{j}}$ と，$\mathfrak{d}_{\mathfrak{i}}$ が $\mathfrak{d}_{\mathfrak{j}}$ と，それぞれ等しくなるちょうどそのときに限る．

1. は，以下のようにしてわかる．$a_{\mathfrak{i}}$ が $\mathfrak{b}_{\mathfrak{j}}$ の中に現れる場合には，論理式 $\mathfrak{D}$ で項 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{i}}$ が $\mathfrak{q}_{\mathfrak{j}}$ の構成要素となっているから，$\varphi(\mathfrak{q}_{\mathfrak{j}})$，および $\psi(\mathfrak{q}_{\mathfrak{j}})$，$\chi(\mathfrak{q}_{\mathfrak{j}},\mathfrak{r}_{\mathfrak{j}},\mathfrak{s}_{\mathfrak{j}})$ の構成要素となっている．つまり $\mathfrak{k}_{\mathfrak{h}_{\mathfrak{j}}}$，$\mathfrak{k}_{\mathfrak{l}_{\mathfrak{j}}}$，$\mathfrak{k}_{\mathfrak{z}_{\mathfrak{j}}}$ のおのおのの構成要素となっているわけである．したがって，$\mathfrak{k}_{\mathfrak{i}}$ の重複度は，項 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{h}_{\mathfrak{j}}}$，$\mathfrak{k}_{\mathfrak{l}_{\mathfrak{j}}}$，$\mathfrak{k}_{\mathfrak{z}_{\mathfrak{j}}}$ のそれぞれの重複度より小さく，したがって，添数 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{j}}$，$\mathfrak{l}_{\mathfrak{j}}$，$\mathfrak{z}_{\mathfrak{j}}$ は，$\mathfrak{i}$ より大きいことがわかる．さらに，$a_{\mathfrak{i}}$ が $\mathfrak{c}_{\mathfrak{j}}$ あるいは，$\mathfrak{d}_{\mathfrak{j}}$ の中に現れるなら，$\mathfrak{k}_{\mathfrak{i}}$ は，論理式 $\mathfrak{D}$ の中で，$\mathfrak{k}_{\mathfrak{z}_{\mathfrak{j}}}$ の構成要素として現れる．したがって，項 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{i}}$ は $\mathfrak{k}_{\mathfrak{z}_{\mathfrak{j}}}$ より小さな重複度を持っており，よって，添数 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{j}}$ は $\mathfrak{i}$ より大きくなる．

2. は，項 $\varphi(\mathfrak{q}_{\mathfrak{i}})$ はいずれにしても $\psi(\mathfrak{q}_{\mathfrak{j}})$，$\chi(\mathfrak{q}_{\mathfrak{j}},\mathfrak{r}_{\mathfrak{j}},\mathfrak{s}_{\mathfrak{j}})$ と異なり，同様に，$\psi(\mathfrak{q}_{\mathfrak{i}})$ は $\chi(\mathfrak{q}_{\mathfrak{j}},\mathfrak{r}_{\mathfrak{j}},\mathfrak{s}_{\mathfrak{j}})$ と異なることから導ける．

3. は次のようにして示せる．$\mathfrak{h}_{\mathfrak{i}}$ と $\mathfrak{h}_{\mathfrak{j}}$ が等しくなるのは，論理式 $\mathfrak{D}$ で，項 $\varphi(\mathfrak{q}_{\mathfrak{i}})$ と $\varphi(\mathfrak{q}_{\mathfrak{j}})$ が等しくなる，つまり $\mathfrak{q}_{\mathfrak{i}}$ と $\mathfrak{q}_{\mathfrak{j}}$ が等しくなるちょうどそのときに限る．ところが，これは，$\mathfrak{b}_{\mathfrak{i}}$ と $\mathfrak{b}_{\mathfrak{j}}$ が等しくなるときである．$\mathfrak{l}_{\mathfrak{i}}$ と $\mathfrak{l}_{\mathfrak{j}}$ が等しくなるのは，$\psi(\mathfrak{q}_{\mathfrak{i}})$ と $\psi(\mathfrak{q}_{\mathfrak{j}})$ が等しくなるちょうどそのときに限る．このための必要十分条件は，再び $\mathfrak{b}_{\mathfrak{i}}$ と $\mathfrak{b}_{\mathfrak{j}}$ が等しくなることである．$\mathfrak{z}_{\mathfrak{i}}$ と $\mathfrak{z}_{\mathfrak{j}}$ が等しくなるのは，$\chi(\mathfrak{q}_{\mathfrak{i}},\mathfrak{r}_{\mathfrak{i}},\mathfrak{s}_{\mathfrak{i}})$ と $\chi(\mathfrak{q}_{\mathfrak{j}},\mathfrak{r}_{\mathfrak{j}},\mathfrak{s}_{\mathfrak{j}})$ が等しくなるちょうどそのときに限る．このための必要十分条件は，$\mathfrak{q}_{\mathfrak{i}}$ が $\mathfrak{q}_{\mathfrak{j}}$ と，$\mathfrak{r}_{\mathfrak{i}}$ が $\mathfrak{r}_{\mathfrak{j}}$ と，$\mathfrak{s}_{\mathfrak{i}}$ が $\mathfrak{s}_{\mathfrak{j}}$ とそれぞれ等しくなることであるが，これに対しては，再び $\mathfrak{b}_{\mathfrak{i}}$ が $\mathfrak{b}_{\mathfrak{j}}$ と，$\mathfrak{c}_{\mathfrak{i}}$ が $\mathfrak{c}_{\mathfrak{j}}$ と，$\mathfrak{d}_{\mathfrak{i}}$ が $\mathfrak{d}_{\mathfrak{j}}$ とそれぞれ等しくなることが必要十分条件となる．

離接論理式 $\mathfrak{D}_1$ の，このような性質により，この論理式から，規則 (μ)，(ν)[37] の適用と，離接節の繰り返しが出てきたときにはそれを省略することにより，論理式 $\mathfrak{E}$ に戻ることができる．これは，以下のように行うことができる．

---

[37] 195 ページ参照．

まず，規則 (μ) の適用により，離接節

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{b}_i, a_{\mathfrak{h}_i}, a_{\mathfrak{l}_i}, \mathfrak{c}_i, \mathfrak{d}_i, a_{\mathfrak{z}_i}, \mathfrak{e}_i)$$

のおのおのを，対応する論理式

$$(Ew)\mathfrak{A}(\mathfrak{b}_i, a_{\mathfrak{h}_i}, a_{\mathfrak{l}_i}, \mathfrak{c}_i, \mathfrak{d}_i, a_{\mathfrak{z}_i}, w)$$

に変換することができる．これにより，離接節の繰り返しが起こった場合には，これを取り除く．

これにより生じる離接論理式 $\mathfrak{D}_2$ では，そこに現れる添数 $\mathfrak{z}_i$ は，それぞれ互いに異なる．なぜなら，$\mathfrak{z}_i$ と $\mathfrak{z}_j$ が等しい場合には，添数条件 3. により，$\mathfrak{b}_i$ と $\mathfrak{b}_j$，$\mathfrak{c}_i$ と $\mathfrak{c}_j$，$\mathfrak{d}_i$ と $\mathfrak{d}_j$ は，それぞれ等しくなり，したがって，$\mathfrak{h}_i$ と $\mathfrak{h}_j$，および $\mathfrak{l}_i$ と $\mathfrak{l}_j$ も，それぞれ等しくなる．したがって，添数 i と j を持つ離接節は互いに等しくなる．

今，$a_\mathfrak{m}$ を，変数 $a_1, \ldots, a_\mathfrak{p}$ のうち項 $\mathfrak{b}_i$，$\mathfrak{c}_i$，$\mathfrak{d}_i$ ——これらを，略して，それぞれ，“$\mathfrak{b}$-項”，“$\mathfrak{c}$-項”，“$\mathfrak{d}$-項” と呼ぶことにする——のうちの 1 つに現れるような添数うち最大のものとしよう．$a_\mathfrak{m}$ が添数 i を持つ離接節の，$\mathfrak{b}_i$，$\mathfrak{c}_i$，$\mathfrak{d}_i$ のどれかに現れるなら，添数条件 1. により，添数 $\mathfrak{z}_i$ は $\mathfrak{m}$ より大きいから，これらの，$\mathfrak{b}$-項，$\mathfrak{c}$-項，および $\mathfrak{d}$-項に現れる全ての変数 a_j の添数より大きくなる．さらに，添数条件 2. により，この添数は添数 $\mathfrak{h}_j$，$\mathfrak{l}_j$ のどれとも等しくならない．したがって，前に述べたことから，添数 $\mathfrak{z}_j$，$\mathrm{j} \neq \mathrm{i}$ のどれとも等しくならない．これにより，変数 $a_{\mathfrak{z}_i}$ は離接論理式 $\mathfrak{D}_2$ で，ただ 1 度だけ現れることがわかるから，この添数 i を持つ離接節に対し，変数 $a_{\mathfrak{z}_i}$ に関して，規則 (ν) を適用することができる．以上により，$a_{\mathfrak{z}_i}$ に対する束縛変数を z ととれば，この離接節の代わりに，

$$(z)(Ew)\mathfrak{A}(\mathfrak{b}_i, a_{\mathfrak{h}_i}, a_{\mathfrak{l}_i}, \mathfrak{c}_i, \mathfrak{d}_i, z, w)$$

という離接節を得る．これに対して，今度は規則 (μ) を 2 回適用することにより，

$$(Eu)(Ev)(z)(Ew)\mathfrak{A}(\mathfrak{b}_i, a_{\mathfrak{h}_i}, a_{\mathfrak{l}_i}, u, v, z, w)$$

が得られる．このように，離接節で $a_\mathfrak{m}$ が，その中の，$\mathfrak{b}$-項，$\mathfrak{c}$-項，$\mathfrak{d}$-項のどれかに現れるようなもの全て対し，同様の手続きを施すことができる．これにより，離接節の繰り返しが生じた場合には，これを取り除く．このようにして得

られた離接論理式 $\mathfrak{D}_3$ では，変数 $a_{\mathfrak{m}}$ は $\mathfrak{c}$-項および $\mathfrak{d}$-項には現れないが，まだ幾つかの $\mathfrak{b}$-項で現れる可能性がある．離接節で，そのような変数 $a_{\mathfrak{m}}$ を含むような $\mathfrak{b}$-項を持つものは，いずれにしても，規則 (μ)，(ν) の適用により

$$(E\,u)(E\,v)(z)(E\,w)\mathfrak{A}(\mathfrak{b}_{\mathrm{i}}, a_{\mathfrak{h}_{\mathrm{i}}}, a_{\mathfrak{l}_{\mathrm{i}}}, u, v, z, w)$$

という形に変換されたものとなっている．ここに現れる，変数の添数 $\mathfrak{h}_{\mathrm{i}}$，$\mathfrak{l}_{\mathrm{i}}$ は（$\mathfrak{b}_{\mathrm{i}}$ は変数 $a_{\mathfrak{m}}$ を含むのだから），添数条件 1. により $\mathfrak{m}$ より大きく，したがって（$\mathfrak{D}_3$ に，まだ残っている）$\mathfrak{b}$-項，$\mathfrak{c}$-項，$\mathfrak{d}$-項に現れる全ての a_{j} の添数より大きくなる．

対応する添数 $\mathfrak{h}_{\mathrm{i}}$ は，（$\mathfrak{D}_3$ に，まだ残っている）添数 $\mathfrak{h}_{\mathrm{j}}$，$\mathrm{j} \neq \mathrm{i}$ と等しくなっていることはありえない．なぜなら，そうでなければ添数条件 3. により，$\mathfrak{b}_{\mathrm{i}}$ と $\mathfrak{b}_{\mathrm{j}}$，および $\mathfrak{l}_{\mathrm{i}}$ と $\mathfrak{l}_{\mathrm{j}}$ は等しくなるが，このときには $\mathfrak{b}_{\mathrm{j}}$ も変数 $\mathfrak{m}$ を含むから，添数 j の離接節は，

$$(E\,u)(E\,v)(z)(E\,w)\mathfrak{A}(\mathfrak{b}_{\mathrm{j}}, a_{\mathfrak{h}_{\mathrm{j}}}, a_{\mathfrak{l}_{\mathrm{j}}}, u, v, z, w)$$

という形をしていなければならず，したがって，上で確かめたことにより，離接節

$$(E\,u)(E\,v)(z)(E\,w)\mathfrak{A}(\mathfrak{b}_{\mathrm{i}}, a_{\mathfrak{h}_{\mathrm{i}}}, a_{\mathfrak{l}_{\mathrm{i}}}, u, v, z, w)$$

と等しくならなければならないが，$\mathfrak{D}_3$ では離接節の繰り返しは存在しないのであった．したがって，添数 $\mathfrak{h}_{\mathrm{i}}$ は，$\mathfrak{D}_3$ に現れる添数 $\mathfrak{h}_{\mathrm{j}}$，$\mathrm{j} \neq \mathrm{i}$ と異なる．最後にまた，添数条件 2. により，添数 $\mathfrak{h}_{\mathrm{i}}$ は，$\mathfrak{D}_3$ に現れる添数 $\mathfrak{l}_{\mathrm{j}}$，$\mathfrak{z}_{\mathrm{j}}$ とも異なるものとなっている．

これにより，全体として，変数 $a_{\mathfrak{h}_{\mathrm{i}}}$ は，離接論理式 $\mathfrak{D}_3$ で，ただ 1 か所のみに現れることがわかった．同じことは，変数 $a_{\mathfrak{l}_{\mathrm{i}}}$ についてもいえる．よって，この添数 i を持つ離接節に対し，まず，変数 $a_{\mathfrak{l}_{\mathrm{i}}}$ に関して，さらにそれに続けて，変数 $a_{\mathfrak{h}_{\mathrm{i}}}$ に関して，規則 (ν) を適用することができて，その際に，導入するべき束縛変数として，y と x を採用することにすれば，考察していた離接節の代わりに，論理式

$$(x)(y)(E\,u)(E\,v)(z)(E\,w)\mathfrak{A}(\mathfrak{b}_{\mathrm{i}}, x, y, u, v, z, w)$$

を得る．これは，今度は，規則 (μ) の適用により，

$$(E\,t)(x)(y)(E\,u)(E\,v)(z)(E\,w)\mathfrak{A}(t, x, y, u, v, z, w),$$

つまり，論理式 $\mathfrak{E}$ に変形することができる．

この手続きを，$\mathfrak{D}_3$ の離接節で，そこで，変数 $a_{\mathfrak{m}}$ が $\mathfrak{b}$-項に現れるようなもの全てに対し施す．この際，離接節の繰り返しが生じた場合には，これを取り除く．

これにより，離接論理式 $\mathfrak{D}_4$ で，一般的には，次の 3 つの種類の離接節を含んでいるものが得られる．

$$(E\,w)\mathfrak{A}(\mathfrak{b}_i, a_{\mathfrak{h}_i}, a_{\mathfrak{l}_i}, \mathfrak{c}_i, \mathfrak{d}_i, a_{\mathfrak{z}_i}, w)$$

という形の離接節——これを“第 1 種の離接節”と
呼ぶことにする——，また，

$$(E\,u)(E\,v)(z)(E\,w)\mathfrak{A}(\mathfrak{b}_i, a_{\mathfrak{h}_i}, a_{\mathfrak{l}_i}, u, v, z, w)$$

という形の離接節——これを“第 2 種の離接節”と呼ぶことにする——，そして，論理式 $\mathfrak{E}$ からなる離接節である．

$\mathfrak{D}_1$ から $\mathfrak{D}_4$ に到る移行の手続きにより，$\mathfrak{D}_4$ の中では，変数 $a_{\mathfrak{m}}$ は，もはやどの $\mathfrak{b}$-項，$\mathfrak{c}$-項，$\mathfrak{d}$-項にも現れないようにすることができた．$a_{\mathfrak{m}^*}$ を，$\mathfrak{D}_4$ で，まだ残っている $\mathfrak{b}$-項，$\mathfrak{c}$-項，$\mathfrak{d}$-項に現れる添数付けされた変数 $a_{\mathfrak{j}}$ の中で最大の添数を持つものとする．このとき，再び，添数条件と，$\mathfrak{D}_4$ で同じ離接節が複数現れないことを用いて，変数 $a_{\mathfrak{m}^*}$ が，$\mathfrak{D}_4$ の第 1 種の離接節

$$(E\,w)\mathfrak{A}(\mathfrak{b}_i, a_{\mathfrak{h}_i}, a_{\mathfrak{l}_i}, \mathfrak{c}_i, \mathfrak{d}_i, a_{\mathfrak{z}_i}, w)$$

で項 $\mathfrak{b}_i$，$\mathfrak{c}_i$，$\mathfrak{c}_i$ のどれかに現れるなら，変数 $a_{\mathfrak{z}_i}$ は $\mathfrak{D}_4$ でただ 1 度しか現れないことがわかる．したがって，そのような離接節は，規則 (ν) を変数 $a_{\mathfrak{z}_i}$ に適用して，規則 (μ) を 2 回用いることで，第 2 種の離接節に変形することができる．

このような変形を，上のような性質を持つ第 1 種の離接節の全てに行って，その結果生じた離接節の繰り返しを取り除く．このようにして得られた離接論理式 $\mathfrak{G}_5$ では，変数 $a_{\mathfrak{m}^*}$ は $\mathfrak{c}$-項，$\mathfrak{d}$-項には現れず，現れるとすれば $\mathfrak{b}$-項の中のみで，しかもそれは第 2 種の離接節においてのみである．ここで，そのような離接節

$$(E\,u)(E\,v)(z)(E\,w)\mathfrak{A}(\mathfrak{b}_i, a_{\mathfrak{h}_i}, a_{\mathfrak{l}_i}, u, v, z, w)$$

に現れる変数 $a_{\mathfrak{h}_i}$，$a_{\mathfrak{l}_i}$ は（再び，添数条件と，$\mathfrak{D}_5$ において離接節の繰り返しが現れないという事実により），$\mathfrak{D}_5$ の他の場所には現れない．よって，対応

する離接節は，規則 (ν) を，まず変数 $a_{\mathfrak{l}_i}$ に，次に変数 $a_{\mathfrak{h}_i}$ に適用して，その後，規則 (μ) を適用することにより，論理式 $\mathfrak{E}$ に変形することができる．

この手続きを，変数 $a_{\mathfrak{m}^*}$ を $\mathfrak{b}$-項に含むような $\mathfrak{D}_5$ の第2種の離接節の全てに適用して，それによって離接節の繰り返しが生じた場合にはそれを取り除くことにより，離接論理式 $\mathfrak{D}_6$ で，変数 $a_{\mathfrak{m}^*}$ がもはや $\mathfrak{b}$-項，$\mathfrak{c}$-項，$\mathfrak{d}$-項のどれにも現れないようなものが得られる．

このように続けて，第1種の離接節を第2種の離接節へ，第2種の離接節を論理式 $\mathfrak{E}$ へと変換していき，この際に，離接節の繰り返しが起こった場合には，これを除去し，次々に $\mathfrak{b}$-項，$\mathfrak{c}$-項，$\mathfrak{d}$-項で添数付きの変数 $a_{\mathfrak{j}}$ の現れるものを除去してゆくことができる．ここで，これらの変数は，添数の高いものから低いものへ順にとってゆく．

このようにして，上で記述したような操作を，たかだか $(\mathfrak{p}-1)$ 回適用することにより，全ての離接節は，第1種のものか，第2種のものか，あるいは論理式 $\mathfrak{E}$ であるような離接論理式で，離接節の繰り返しは現れず，そこに現れる $\mathfrak{b}$-項，$\mathfrak{c}$-項，$\mathfrak{d}$-項は $a_1, \ldots, a_{\mathfrak{p}}$ の中の変数を含まないようなものが得られる．

このような離接論理式では，再び，添数条件により，第1種の離接節を規則 (μ)，(ν) により，第2種の離接節に変形することができて，その際に生じた離接節の繰り返しを取り除いた後，全ての第2種の離接節を，論理式 $\mathfrak{E}$ に変形することができる．ところが，これの後で，再び離接節の繰り返しを取り除くと，論理式 $\mathfrak{E}$ が得られていることになる．

このようにして，論理式 $\mathfrak{E}$ の離接論理式 $\mathfrak{D}_1$ からの導出が得られた．ところが，$\mathfrak{D}_1$ は命題計算の恒真な論理式への代入により得られていたから，これにより，$\mathfrak{E}$ の述語計算での導出が与えられたことになる．

以上の考察により，全体として次のことが示されたことになる．論理式 $\mathfrak{E}$

$$(E\,t)(x)(y)(E\,u)(E\,v)(z)(E\,w)\mathfrak{A}(t,x,y,u,v,z,w)$$

が導出可能なのは，(新しい関数記号 φ，ψ，χ を用いてつくられた）論理式 (5):

$$(E\,t)(E\,u)(E\,v)(E\,w)\mathfrak{A}(t,\varphi(t),\psi(t),u,v,\chi(t,u,v),w)$$

が導出可能な，ちょうどそのときに限る．あるいは，第1 ε-定理により，これと同値となる，離接論理式 $\mathfrak{D}$ で

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{q},\varphi(\mathfrak{q}),\psi(\mathfrak{q}),\mathfrak{r},\mathfrak{s},\chi(\mathfrak{q},\mathfrak{r},\mathfrak{s}),\mathfrak{t})$$

という形の離接節で，$\mathfrak{q}$，$\mathfrak{r}$，$\mathfrak{s}$，$\mathfrak{t}$ は，自由変数，個体記号，関数記号のみからなる項であるようなものからなるものが，命題計算の恒真な論理式への代入によって得られるときに限る．

（この離接論理式 $\mathfrak{D}$ は，論理式 (5) の導出から，ε-記号の導入と，それに続く ε-記号の除去によって達成される束縛変数の除去により得られる．）

さらに，次の定理も成り立つ:

$$(E\,t)(x)(y)(E\,u)(E\,v)(z)(E\,w)\mathfrak{A}(t,x,y,u,v,z,w)$$

という形の論理式 $\mathfrak{E}$ が導出できるとき，これの導出から，離接論理式 $\mathfrak{D}_1$ で，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{q},\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{r},\mathfrak{s},\mathfrak{c},\mathfrak{t})$$

という形の離接節——ここに，$\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$，$\mathfrak{c}$ は自由変数で，$\mathfrak{q}$，$\mathfrak{r}$，$\mathfrak{s}$ は項である——からなり，命題計算の恒真な論理式への代入により得られるようなものが求まり，論理式 $\mathfrak{E}$ は，この離接論理式から，規則 (μ)，(ν)，ならびに離接節の繰り返しの削除により得られる．

ここで，ただちに，次のように，この命題を強めることができる: 上の離接論理式 $\mathfrak{D}$ は，そこでは，論理記号以外の記号としては，関数記号 φ，ψ，χ 以外では，$\mathfrak{E}$ にすでに現れたもののみが用いられているようにとることができる．この要請は，$\mathfrak{D}$ の離接節に現れる項 $\mathfrak{q}$，$\mathfrak{r}$，$\mathfrak{s}$，$\mathfrak{t}$ で現れる記号は，関数記号 φ，ψ，χ 以外では，$\mathfrak{E}$ にすでに現れたもののみが用いられているということと同値である．実際，この条件が満たされるようにするのは容易である．つまり，まず項 $\mathfrak{q}$，$\mathfrak{r}$，$\mathfrak{s}$，$\mathfrak{t}$ の中に，$\mathfrak{E}$ で現れない φ，ψ，χ と異なる個体記号や関数記号が現れるなら，そのような個体記号や関数記号を，全て変数 a で置き換える．これにより得られる離接論理式は，再び，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{q},\varphi(\mathfrak{q}),\psi(\mathfrak{q}),\mathfrak{r},\mathfrak{s},\chi(\mathfrak{q},\mathfrak{r},\mathfrak{s}),\mathfrak{t})$$

という形の離接節からなっており，項 $\mathfrak{q}$，$\mathfrak{r}$，$\mathfrak{s}$，$\mathfrak{t}$ のみが前と異なるものになっている．離接論理式が，命題計算の恒真な論理式から代入により得られるという性質も保たれる．このような置き換えにより，前に成り立っていた項の間の同等性は壊れないので，初等論理式の同等性も壊れないからである．

同様にして，離接論理式 $\mathfrak{D}_1$ では，論理記号以外の記号は，全て $\mathfrak{E}$ にすでに現れるもの以外は現れないようにできることもわかる（つまり，関数記号 φ，ψ，χ の特別な役割は，$\mathfrak{D}_1$ では不要にできる）．

上に枚挙した結果を得るために用いた証明方法は，すぐにわかるように，論理式 $\mathfrak{E}$ で選んだ特殊な形に依存せず，任意の冠頭型の論理式に，同様に適用できる．この際に，扱われている論理式は——これは，以下では，毎回いちいち断らないことにするが——述語計算の変数と記号，さらに幾つかの個体記号，関数記号，述語記号からなっている．

そのような論理式 $\mathfrak{E}$ に対し，我々の結果を一般的な形で記述するために，まず，$\mathfrak{E}$ の束縛変数は，論理式の初めに並んでいる量化詞により，順序づけがなされているという点に注意を促しておこう．全称記号により束縛された変数を，略して“全称変数”と呼び，存在記号により束縛された変数を“存在変数”と呼ぶことにする．また，今述べたような順序づけに関して，全称変数の“前にある”存在変数というようないい方をすることにする．

論理式 $\mathfrak{E}$ が全称記号で始まっている場合については，さらに，存在変数が前にない全称変数は，我々の手続きにおいては，個体変数（いわば，0 変数関数記号）が対応させられることになるということに注意をしておく．例えば，前に考察していた論理式 $\mathfrak{E}$ で，存在記号 (Et) とパラメータ変数 t を取り去ると，我々の初めの考察で，導出可能な論理式 (1) のところで，論理式

$$(x)(y)\mathfrak{A}(x,y) \to \mathfrak{A}(\alpha,\beta)$$

が現れることになる．ここに，（前での φ，ψ に対応する）個体記号 α，β は，$\mathfrak{E}$ に現れないようなものから選ばれる．

記号による整約による考察においても，$\mathfrak{E}$ の全称変数で，存在変数がその前にないものは，個体記号で置き換えられる．実際，記号による整約の手続きを施さなければならないのは，$\overline{\mathfrak{E}}$ を冠頭型論理式に変形して得られる論理式だが，この変形により，そのような全称変数は，全称変数がその前にないような存在変数に変換される．

命題論理で真となる離接論理式から $\mathfrak{E}$ に戻る際には，項の列

$$\mathfrak{k}_1,\ldots,\mathfrak{k}_\mathfrak{p}$$

には，新しく導入された関数記号で始まるものの他に，新しく導入された個体記号を，重複度 0 の項として加える必要がある．

これらの準備に留意して，我々の結果は，次の 2 つの定理として述べることができる．

a) 冠頭型論理式 $\mathfrak{E}$ が述語計算で導出できるのは，命題計算で真となる離接論理式で，そのおのおのの離接節は $\mathfrak{E}$ から量化詞を捨てて，束縛変数を適当な項で置き換えることによって得られるようなもので，さらに，以下のような“構造条件”を満たすものが求まるちょうどそのときである．1. 置き換えに用いられる項は，個体記号，$\mathfrak{E}$ に現れる記号，それに **$\mathfrak{E}$ の全称変数に 1 対 1 に対応する**個体記号と関数記号からなる．この 1 対 1 対応は，その前に存在変数のない全称変数には個体変数を対応させ，$\mathfrak{k}$ 個の存在変数が前にあるものには，$\mathfrak{k}$ 変数関数記号を対応させるようになっている．2. 存在変数の前にない全称変数は，全ての離接節において，それぞれ，それらに対応させられた個体変数で置き換えられる．1つ以上の存在変数が前にある全称変数は，それに対応させられた関数記号で置き換えられ，その際，そこに現れるパラメータとしては，前にある存在変数に対応する項がそれらの存在変数の順序に従って現れる（それらの存在変数に対応して現れる項は，$\mathfrak{E}$ に含まれる，自由個体変数，個体記号，関数記号，および新しく付け加えられた記号からつくられている任意のものとなりうる）．

b) 述語計算で導出可能な冠頭型論理式 $\mathfrak{E}$ に対し，ある離接論理式で，そのおのおのの離接節は $\mathfrak{E}$ から量化詞を取り除き，全称変数を適当な自由個体変数で置き換え，存在変数を，自由変数と $\mathfrak{E}$ に現れる，個体記号と関数記号からなる項で置き換えることにより，得られているようなものがとれ，さらに，この離接論理式は，命題計算の恒真な論理式から代入により得られ，この論理式から $\mathfrak{E}$ は，規則 (μ)，(ν)[38]，ならびに離接節の繰り返しの削除により導出されるようにできる．

この 2 つの主張を併せたものは，エルブラン（J. HERBRAND）が形式論理学の基本定理として彼の学位論文[39]で証明している冠頭型論理式に関する定理を，それとは若干異なる仕方で記述したものとなっている．したがって，これ

---

[38] 195 ページ参照.

[39] “Recherches sur la théorie de la démonstration, Thèse de l’Univ. de Paris 1930”. これは，*Travau de la Soc. des Sc. et Let. de Varsovie* (1930) に発表されている．エルブランの第 2 論文 “Sur le problème fondamental de la logique mathématique”, *C. R. Soc. Sci. Varsovie* XXIV, C1. III (1931) も参照されたい．エルブランの証明は追うのが難しく，ついでにいえば,最近 BURTON DREBEN によってなされたような（“False Lemmas in Herbrand”, B. DREBEN, P. ANDREWS, ST. AANDERAA, *Bull. Amer. Math. Soc.* 69: 699–706, 1963 参照）訂正が必要である．より簡単な証明は,すでにゲン

を**エルブランの定理** と呼ぶことにする．

まず，この定理の意味するところを簡単な例によって考えてみよう．次の論理式の組を考える．

$$(x)(E\,y)(x < \varphi(\varphi(y))) \rightarrow (x)(E\,y)(x < \varphi(y)),$$
$$(x)(E\,y)(x < \varphi(y)) \rightarrow (x)(E\,y)(x < \varphi(\varphi(y)))$$

1番目のものが導出可能であることは，ただちにわかる．2番目のものについては，数論的解釈において常に成り立つとは限らないことを示すことができる．この2つの論理式に定理 a)，b) を応用するには，まず，これらを冠頭型論理式に変換しなければならないが，これは複数のやり方によって可能である．例えば，1番目のものは，

$$((1)) \qquad (x)(E\,y)(z)(\overline{y < \varphi(\varphi(z))} \vee x < \varphi(y))$$

と同値になり，2番目のものは，

$$((2)) \qquad (x)(E\,y)(z)(\overline{y < \varphi(z)} \vee x < \varphi(\varphi(y)))$$

ツェン(G. GENTZEN)により，彼の "Untersuchungen über das logische Schließen", *Math. Z.* Bd.39 (1934) Heft 2, 3 (特に IV, §2 参照) で与えられている．この証明は，述語計算のある種の部分体系に対しても応用のできる，より一般的な定理から導かれる．この，より一般的な定理の新しい証明は，シュッテ (KURT SCHÜTTE: "Schlußweisenkalküle der Prädikatenlogik", *Math. Ann.* 122: 47–65, 1950), HASKELL B. CURRY ("A Theory of Formal Deducibility", Notre Dame Mathematical Lectures Number 6, Indiana, 1950)，および，STEPHEN C. KLEENE ("Introduction to Metamathematics", Bibliotheca Mathematica, Bd.1, Amsterdam, 1952, §78) で与えられている．すでにみたように，エルブランの定理は，初等計算での導出の定理 (63 ページ参照) から導かれる．この定理は，ε-定理から得られたのであったが，これは，シュテニウス (ERIC STENIUS) の述語計算に関する定理 (63 ページの脚注参照) からも導くことができる．シュッテやシュテニウスの証明は，直接，我々がここで扱っている論理計算の形式を扱っているが，ゲンツェン，CURRY, KLEENE らの証明は，Sequenz 計算の枠組みの中で行われている．最後に，エルブランの定理は E. W.BETH の意味論的数表の方法によっても得られる．これに関しては BETH の著書 "The Foundations of Mathematics" (Studies in Logic, Amsterdam, 1959) の，sections 90–92 を参照されたい．STIG KANGER ("Provability in Logic ", Stockholm Studies in Philosophy 1, Uppsala 1957), R. SIKORSKI("On Herbrands Theorem", Colloquium Mathematicum VI:55–58, 1958), H. RASIOWA と R. SIKORSKI ("On the Genzen Theorem", *Fund. Math.* XLVIII:57–69, 1960) らによる，ゲンツェンの定理とエルブランの定理の集合論的証明についても注意しておきたい．

と同値になる．

定理 a) により，((1)) が導出可能であることの必要十分条件は，離接論理式で，その離接節が変数と記号 φ，ψ によってつくられた項 $\mathfrak{t}$ に対して

$$\overline{\mathfrak{t} < \varphi(\varphi(\psi(\mathfrak{t})))} \vee a < \varphi(\mathfrak{t})$$

という形をしているものが恒真な論理式から代入によって生じることである．このような離接論理式は，例えば，

$$(\overline{a<\varphi(\varphi(\psi(a)))} \vee a<\varphi(a)) \vee (\overline{\varphi(\psi(a))<\varphi(\varphi(\psi(\varphi(\psi(a)))))} \vee a<\varphi(\varphi(\psi(a))))$$

ととれ，これによって，その論理式が導出可能であることが示せる．もし，論理式 ((2)) が導出可能だったとすると，これに対応する，離接節

$$\overline{\mathfrak{t} < \varphi(\psi(\mathfrak{t}))} \vee a < \varphi(\varphi(\mathfrak{t}))$$

からなる離接論理式が存在しなければならない．しかし，このためには，否定されて現れる論理式 $\mathfrak{t} < \varphi(\psi(\mathfrak{t}))$ が論理式 $a < \varphi(\varphi(\mathfrak{r}))$ 形態として同じにならなければならないが，項 $\varphi(\mathfrak{r})$ は項 $\psi(\mathfrak{t})$ と等しくなることはありえないので，これは不可能である．これにより，((2)) が導出可能でないことがわかる．

今度は定理 b) に目を移してみると，これにより，導出可能であることが示された論理式 ((1)) に対して，変数 $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$ と変数と記号 φ からなる項 $\mathfrak{t}$ による離接節

$$\overline{\mathfrak{t} < \varphi(\varphi(\mathfrak{a}))} \vee \mathfrak{b} < \varphi(\mathfrak{t})$$

からなる離接論理式で，恒真な論理式から代入によって得られるものが存在して，これから論理式 ((1)) が規則 (μ)，(ν)，ならびに離接節の繰り返しの削除により得られなくてはならない．

このような性質を持つ離接論理式としては，例えば，次の論理式

$$(\overline{a < \varphi(\varphi(b))} \vee a < \varphi(a)) \vee (\overline{\varphi(b) < \varphi(\varphi(c))} \vee a < \varphi(\varphi(b)))$$

がそのようなものになる．なぜなら，これは恒真な論理式

$$(\overline{A} \vee B) \vee (\overline{C} \vee A)$$

への代入によって得られるが，一方，この論理式から，論理式 ((1)) は次のようにして得られるからである: まず，規則 (ν) を，変数 c に関して適用して，

その後で，規則 (μ) を適用することにより，論理式

$$(\overline{a < \varphi(\varphi(b))} \vee a < \varphi(a)) \vee (Ey)(z)(\overline{y < \varphi(\varphi(z))} \vee a < \varphi(y))$$

が得られ，さらに，規則 (ν) を変数 b に関して適用して，規則 (μ) を適用することにより，

$$(Ey)(z)(\overline{y < \varphi(\varphi(z))} \vee a < \varphi(y)) \vee (Ey)(z)(\overline{y < \varphi(\varphi(z))} \vee a < \varphi(y))$$

が得られる．ここで，両方の等しい離接節の1つを取り去ることができる．ところが，これにもう1度規則 (ν) を適用すると，目的の論理式

$$(x)(Ey)(z)(\overline{y < \varphi(\varphi(z))} \vee x < \varphi(y))$$

が得られる．

冠頭型論理式 $\mathfrak{E}$ で量化詞のブロックの後にくる表現が離接論理式 $\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_\mathfrak{r}$ という形をしていて，離接節 $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mathfrak{r}$ が論理記号を持たないものであるか，あるいは，そのようなものの否定であるとき，$\mathfrak{E}$ が導出可能であるかどうかは，定理 a) により決定できる．つまり，この定理により，$\mathfrak{E}$ が導出可能であるためには，恒真な論理式への代入によって得られる離接論理式 $\mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_\mathfrak{k}$ で，そのおのおのの離接節は，$\mathfrak{E}$ から量化詞を取り除き，束縛変数を適当な項で置き換えにより与えられ，この際，さらに，より子細な構造条件が成り立っているようなものが得られることが必要十分である．ここで，論理式 $\mathfrak{B}_\mathfrak{i}$ $(\mathfrak{i} = 1, \ldots, \mathfrak{k})$ のおのおのは，離接論理式 $\mathfrak{A}_1^{(\mathfrak{i})} \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{i})}$ という形をしており，このおのおのの離接節は，初等論理式であるか，そのようなものの否定であるかのどちらかである．ところが，論理式 $\mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_\mathfrak{k}$ が命題計算の恒真な論理式から代入によって得られるためには，$\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{r}$ 個の離接節のうちに，1つが他の1つの否定となっているような組が現れることが必要十分となる．

これにより，定理 a) により与えられた $\mathfrak{E}$ の導出可能性の必要十分条件は，表現 $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mathfrak{r}$ のうちの2つ $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$，$\mathfrak{A}_\mathfrak{q}$ が存在して，新しい変数と関数記号の $\mathfrak{E}$ の全称変数への対応を行った後，2種類の $\mathfrak{E}$ の存在変数の置き換えで――これらの置き換えで，構造条件により得られる，$\mathfrak{E}$ の全称変数の置き換えに関し――$\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$ から，1番目の置き換えにより得られる論理式が，$\mathfrak{A}_\mathfrak{q}$ から，2番目の置き換えにより得られる論理式の否定と一致しているようにできることに帰着される．このような2つの置き換えを確定できるための条件は，すぐにわかるように，顕現的に書き下すことができ，ここで考察する必要のある表現の組

$\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{A}_\mathfrak{q}$ は限られているので，これによって，$\mathfrak{E}$ の導出可能性の決定法が得られたことになる[40].

任意の冠頭型論理式において，その導出可能性が同様にして決定できなないのは，一般には，離接節 $\mathfrak{B}_1,\ldots,\mathfrak{B}_\mathfrak{k}$ の数に上限が存在しないことによる．上で考察した特殊な場合においては，離接論理式はは初めから 2 つの離接節を持つものと仮定してかまわなかった．離接を $\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{r}$ 個の離接節に展開したとき，そのうちの $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}^{(i)}$, $\mathfrak{A}_\mathfrak{q}^{(j)}$ が，片方がもう片方の否定と一致するような離接節なら，離接論理式 $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}^{(i)} \vee \mathfrak{A}_\mathfrak{q}^{(j)}$ はすでに命題計算の恒真な論理式から代入によって得られるものだからである．

エルブランの定理の，先に与えた定式化とその証明は，冠頭型論理式に関してなされていた．しかし，記号による整約や初等計算での導出の定理などによる証明法により，もっと一般的な命題を得ることができる．これは，量化詞が否定記号の領域内や含意論理式や同値論理式の節の中に現れないような論理式，あるいは肯定的な規定をすれば，幾つかの冠頭型論理式から，離接，合接，および量化詞によって得られるような論理式に関するものである．このような論理式を，簡略に "擬冠頭型" 論理式と呼ぶことにする．任意の述語計算の論式から，命題計算の変形規則 2. と 4.[41]，および述語計算の規則 (λ)[42] により，擬

---

[40] このような場合における，決定性問題の解決は，すでにエルブランにより前に引用した彼の学位論文で示されている．彼の論文 "Sur le problèm fondamental de la logique mathém" では，エルブランは，さらに，導出可能性の判定条件は，この場合，与えられたここで考察しているタイプの論理式に対し，数 $\mathfrak{k}$ でこの論理式が導出可能となるのは，ちょうどそれが $\mathfrak{k}$ 的に真となる場合となる（上の論文の 34 ページ）という性質を持つものを決めることができるという形にすることができるという注意を付加している．この主張に対しエルブランは証明を与えていないが，それが一見正しそうにみえることから,『数学の基礎』原書 I では，そのままの形で引用してしまった（143 ページ下）．この主張が完全には正しくはないことは，シュッテ（K. SCHÜTTE）により指摘されている．

[41] 原書 I, 49–50 ページ参照.〔訳注: これは，それぞれ以下のような変形規則である:

2. 否定に関する規則:
   a) $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ を $\mathfrak{A}$ で置き換えてよい．
   b) $\overline{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}$ を $\overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}$ で置き換えてよい．$\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$ を $\overline{\mathfrak{A}} \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}$ で置き換えてよい．
4. 含意，および，同値の導入および除去に関する規則:
   a) $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ を $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$ で置き換えてよい．
   b) $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ を $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \vee (\overline{\mathfrak{A}} \,\&\, \overline{\mathfrak{B}})$ で置き換えてよい.〕

冠頭型論理式を得ることができる．これらの規則により，擬冠頭型論理式の否定が，擬冠頭型論理式に変形されたときには——規則 (λ) により，冠頭型論理式の否定を，再び冠頭型に変形したときとまったく同じように——全称記号と存在記号および離接記号と合接記号が，それぞれ交換され，否定は量化詞の適用範囲の内側にある表現の前に移動する．

エルブランの定理を擬冠頭型論理式に対し拡張できることは，記号による整約の方法が，冠頭型論理式のときと同様に，擬冠頭型論理式に対しても適用できることから明らかとなる．

これを，1 つの例で，ε-記号による記号による整約の形式化の方法により[43]行ってみてみよう．

$$(x)((y)(E\,z)\mathfrak{A}(x,y,z) \vee (E\,y)(z)\mathfrak{B}(x,y,z))$$

という形をした論理式 $\mathfrak{F}$ を考察する．この論理式は，論理式

$$(y)(E\,z)\mathfrak{A}(a,y,z) \vee (E\,u)(v)\mathfrak{B}(a,u,v)$$

と演繹的に同値で，さらに（規則 (ν) により），論理式

$$(E\,z)\mathfrak{A}(a,b,z) \vee (E\,u)(v)\mathfrak{B}(a,u,v)$$

とも演繹的に同値となる．同値論理式

$$(E\,z)\mathfrak{A}(a,b,z) \sim \mathfrak{A}(a,b,\varepsilon_z\mathfrak{A}(a,b,z)),$$

$$(E\,u)(v)\mathfrak{B}(a,u,v) \sim (v)\mathfrak{B}(a,\varepsilon_u(w)\mathfrak{B}(a,u,w),v)$$

により，上の論理式は，

$$\mathfrak{A}(a,b,\varepsilon_z\mathfrak{A}(a,b,z)) \vee (v)\mathfrak{B}(a,\varepsilon_u(w)\mathfrak{B}(a,u,w),v)$$

と変形することができる．ここで，関数 $\varphi(a,b)$ と $\psi(a)$ を，顕現的定義

$$\varphi(a,b) = \varepsilon_z\mathfrak{A}(a,b,z), \qquad \psi(a) = \varepsilon_u(w)\mathfrak{B}(a,u,w)$$

により導入すれば，これの記入により，論理式

$$\mathfrak{A}(a,b,\varphi(a,b)) \vee (v)\mathfrak{B}(a,\psi(a),v)$$

---

[42]原書 I，139 ページ参照．〔訳注: 本書 195 ページの訳注参照．〕

[43]本書第 3 章，60–62 ページ参照．

が得られるが，これは，

$$\mathfrak{A}(a,b,\varphi(a,b)) \vee \mathfrak{B}(a,\psi(a),c)$$

と演繹的に同値となる．この論理式は，もはや束縛変数を含んでおらず，この論理式からは，述語計算により，論理式 $\mathfrak{F}$ を再び得ることができる．これにより，論理式 $\mathfrak{F}$ の記号による整約が得られたことになる．

この一般化された記号による整約により，213–214 ページの述語計算で導出される冠頭型論理式 $\mathfrak{E}$ に対して行った考察は，まったく同じように，導出可能な擬冠頭論理式 $\mathfrak{E}$ に対して行えるようになり，$\mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_r$ という離接論理式で，おのおのの離接節 $\mathfrak{E}_i$ は $\mathfrak{E}$ から，量化詞を全て取り除き，次のような束縛変数の置き換えを行うことにより得られているようなものが，命題論理において真となる．全ての存在変数は，ある項により置き換えられる．存在記号の適用範囲にないような全称変数は，それらに対応づけられた個体記号で置き換えられる．$\mathfrak{k}$ 個の存在記号の適用範囲の中にある全称変数は,（これらのそれぞれに対応づけられた）$\mathfrak{k}$ 変数の関数記号により置き換えられ，その中にパラメータとして現れるのは，これらの $\mathfrak{k}$ 個の存在記号に対応する存在変数に代わって用いられた項となっている（パラメータの順序は，対応する存在記号の順序と同じものとする）．

この際，存在記号を置き換えて現れる項は，$\mathfrak{E}$ に現れる自由個体変数，個体記号と，関数記号，および新しく導入された全称変数に対応する個体記号と関数記号から，任意に形成されるものでありうる．

逆に，離接論理式 $\mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_r$ で上に述べたような形態を持ったものが，命題論理で真なら，このことから論理式 $\mathfrak{E}$ の述語計算での導出可能性が帰結できる．つまり，この離接論理式が命題論理で真なら，離接論理式 $\mathfrak{E}'_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}'_r$ で，そこに現れる，互いに異なる項で，全称変数に対応する関数記号で始まっているものや，全称変数に対応する個体変数であるようなものを，それぞれ（新しく導入された）自由個体変数で置き換えることにより得られるものも，命題論理で真となるが，この離接論理式 $\mathfrak{E}'_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}'_r$ から，述語計算により論理式 $\mathfrak{E}$ に逆行することができる．

この $\mathfrak{E}$ への逆行は,（以下で述べる）規則 (μ^*)，(ν^*)，ならびに離接節の繰り返しの削除により行うことができる．

規則 $(\boldsymbol{\mu}^*)$，(ν^*) は，規則 (μ)，(ν) の一般化であるが，これらは，次のよう

なものとなる．

規則 ($\boldsymbol{\mu}^*$): ある論理式が，その構成要素（“節”）から合接および離接により組み立てられているとき，それらの節のうちの任意の１つに，現れる項の１つを束縛変数で置き換えて，それに属す存在記号を，この節の前に置くという変形を施してよい．

規則 ($\boldsymbol{\nu}^*$): ある論理式が，その構成要素（節）から合接および離接により組み立てられていて，これらの節の１つが，他の節には現れないような自由個体変数を含んでいるとき，その自由変数を束縛変数に変えて，それに属す全称記号を，この節の前に置いてよい[44]．

擬冠頭型論理式としては，特に，冠頭型論理式の離接があげられる．このような離接論理式を調べることにより，冠頭型論理式の他の冠頭型論理式（冠頭型公理）からの導出可能性を考察することができる．そのような導出可能性は，$\mathfrak{A}_1\ \&\ \ldots\ \&\ \mathfrak{A}_k \to \mathfrak{B}$ という形の含意論理式で，$\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_k$，$\mathfrak{B}$ は冠頭型論理式であるようなものの導出可能性に帰着できる．このような含意論理式は，初等的な変形により，$\overline{\mathfrak{A}}_1 \lor \ldots \lor \overline{\mathfrak{A}}_k \lor \mathfrak{B}$ とでき，論理式 $\overline{\mathfrak{A}}_1,\ldots,\overline{\mathfrak{A}}_k$ は，規則 (λ) [45]により，ただちに冠頭型論理式に変形することができるから，再び，冠頭型論理式の離接が得られる．したがって，後は規則 (ι) [46]により全ての量化詞を論理式の初めに持ってくることができて，全体として冠頭型論理式が得られる．ところが，このような変形では，導入する関数記号が，場合によっては必要より多くのパラメータを持つことになるので，定理 a) の形でのエルブランの定理の応用には適さない．これは，冠頭型論理式の離接の形で，それらの論理式の間に存在している形態の差異が，それらを１つの離接論理式にまとめたときにみえなくなってしまうことと関連している．例えば，

$$(E\,x)(y)\mathfrak{A}(x,y) \lor (E\,x)(E\,y)(E\,z)\mathfrak{B}(x,y,z)$$

という形の離接論理式は，常に

$$(E\,x)(E\,y)(E\,z)(u)\mathfrak{C}(x,y,z,u)$$

---

[44]規則 (μ^*)，(ν^*) の適用にあたっては，同一の論理式が，幾種類もの違ったやり方で，構成要素から，合接および離接により組み立てられているとみなせることがありうるという点に注意すべきである．

[45]原書 I，139 ページ参照.〔訳注: 本書 195 ページの訳注参照.〕

[46]原書 I，137 ページ参照.〔訳注: 本書 195 ページの訳注参照.〕

という形の冠頭型論理式にまとめることができるが，逆に，このような形をした冠頭型論理式は，その前の論理式のような形に分裂することができるとは限らない．このように，決定性問題に関連して，論理式のタイプの分類として，導出可能性の問題に際しては，冠頭論理式の離接を，また，それに双対な関係にある無矛盾性（反駁不可能性）の問題，あるいは対応する意味論的な問題としての“充足可能性”の問題に際しては，冠頭論理式の合接を取り扱う必要が出てくることが多い．

定理 b) と，その一般化からの帰結として，述語計算の変数と記号，それに，場合によっては，幾つかの個体記号，関数記号，述語記号を加えたものから形成される冠頭型論理式の導出で，それが述語計算のみによりなされているようなものは，常に次のようなやり方で得られることがわかる．命題論理で真な量化詞を含まない論理式で，与えられた論理式に含まれている記号以外を含まないようなものから出発して，適当なやり方で規則 (μ^*), (ν^*) を離接節の繰り返しは削除できるという規則とともに適用する．これにより，擬冠頭型でない論理式 $\mathfrak{F}$ の導出は，まず，$\mathfrak{F}$ と同値になる擬冠頭型論理式 $\mathfrak{F}_1$ を求めて，これを，ここで述べたように述語論理で真な量化詞を含まない論理式 $\mathfrak{E}_1$ から導出して，さらに，$\mathfrak{F}_1$ を変形して，$\mathfrak{F}$ へ戻ることで行える．論理式 $\mathfrak{E}_1$ も，初等論理式から形成された合接標準型で，やはり命題論理で真となるものの変形により得ることができる．

これにより，全体として $\mathfrak{F}$ を得るための導出の手続きがどのように分割されているかを考察してみることで，次のような演繹規則が十分なものとなっていることがわかる．

a) 合接と離接に関する，結合法則と可換法則を適用してよい．

b) 初式としては，

$$\mathfrak{P} \vee \overline{\mathfrak{P}} \vee \mathfrak{Q}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{Q}_r \quad (r \geq 0)$$

という形をした論理式，あるいは，そのようなものの合接を用いる．ここに，$\mathfrak{P}$ は，ある初等論理式で，$\mathfrak{Q}_i$ は初等論理式か，初等論理式の否定かのどちらかである．

c) 表現 $\mathfrak{A} \,\&\, (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})$ は $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \vee (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{C})$ で，
表現 $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \,\&\, (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{C})$ は $\mathfrak{A} \vee (\mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C})$ で，
置き換えてよい．

d)　表現 $\mathfrak{A}$ は　$\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ で，
　表現 $\overline{\mathfrak{A}} \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}$ は　$\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$ で，
　表現 $\overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}$ は　$\overline{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}$ で，

置き換えてよい．

e)　離接節の繰り返しは削除してよい．

f)　表現 $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$ は　$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ で，
　表現 $(\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}) \,\&\, (\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{B}})$ は $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ で，

置き換えてよい．

g)　表現 $(\mathfrak{x})\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{x})}$ は　$\overline{(E\,\mathfrak{x})}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ で，
　表現 $(E\,\mathfrak{x})\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{x})}$ は　$\overline{(\mathfrak{x})}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ で，

置き換えてよい．

h)　表現 $(\mathfrak{x})(\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \,\&\, \mathfrak{B})$ は　$(\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \,\&\, \mathfrak{B}$ で，
　表現 $(E\,\mathfrak{x})(\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \vee \mathfrak{B})$ は　$(E\,\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \vee \mathfrak{B}$ で，
　表現 $(\mathfrak{x})(\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \vee \mathfrak{B})$ は　$(\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \vee \mathfrak{B}$ で，
　表現 $(E\,\mathfrak{x})(\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \,\&\, \mathfrak{B})$ は　$(E\,\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \,\&\, \mathfrak{B}$ で，

置き換えてよい．ここに，$\mathfrak{B}$ は変数 $\mathfrak{x}$ を含んでいないものとする．

i)　導出図式

$$\frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{t})}{(E\,\mathfrak{x})(\mathfrak{A}\mathfrak{x})}, \qquad \frac{\mathfrak{B}(\mathfrak{v})}{(\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})}$$

を用いることができる．ここに，$\mathfrak{t}$ は，ある項で，$\mathfrak{v}$ は $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ に現れない自由変数である．これに対し，1番目の図式では，$\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ に現れてもよい．両方の図式とも $\mathfrak{x}$ は上の論理式には現れないものとする．

k)　束縛変数は，衝突が避けられている限り，書き換えてよい．

規則 c)，d)，f)，g)，h) では，置き換えは，そこで述べた方向のみに行うことができる．これらの規則は，全体の（独立した）論理式のみでなく，論理式の構成要素に対しても同様に適用してよい．このときの構成要素は，論理式としての性質を持っていなくても，論理式から自由変数の束縛変数による置き換えによって得られるようなものであればよい．

これらの規則によって規定される制限された述語計算[47]は，その前に行った

---

[47] この計算系はシュッテ（Kurt Schütte）の論文 “Schlußweisenkalküle der Prädikatenlogik”, *Math. Ann.* 122: 47–65 (1950) で定義された，“置き換え計算 K_2”

エルブランの定理に関連した考察により，普通の述語計算と，論理式の導出に関して同等になる．この同等性は，ある論理式の，他の論理式からの導出に対しては成り立たない．普通の述語計算では，論理式 $\mathfrak{B}$ の論理式 $\mathfrak{A}$ からの導出可能性は，$\mathfrak{A}$ が自由変数を含まない場合には，含意論理式 $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ の導出可能性と同値になる．しかし，これは，上のような制限された計算系においては，図式 $\dfrac{\mathfrak{S}, \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}$ が規則として含まれていないため，成り立たなくなる．この図式と対照的に，上で述べた制限された形の述語計算は，論理式の除去ができないようになっている[48]．

注意． 擬冠頭型論理式に制限されない形のエルブランの定理は，論文 "False Lemmas in Herbrand"（223 ページの脚注参照）で与えられている．この一般化された形の定理は，直接的にではないにしても，エルブランの学位論文にすでに述べられている．しかし，その証明は，エルブランの学位論文（原書 II, 第 5 章，3.3 節）での補題を，それより弱いより複雑な形をした補題で置き換えなくてはならなくなるため，本質的な訂正が必要となる．このような補正された証明は，Burton Dreben と John Denton の論文 "A Supplement to Herbrand"（*J. Symb. Logic* 31, 393–398）で与えられている．

しかしながら，エルブランの定理の一般的なヴァージョンは，擬冠頭型論理式に対するものと，本質的には，それほど変わらない．それの与える論理式の導出可能性の判定条件は，任意の論理式を擬冠頭型論理式に変形して[49]，それに対し，前出の形の擬冠頭論理式に対するエルブランの定理を適用したものと同じになっている．

に非常に似たものとなっている．そこでの置き換え計算に比べて，我々の計算系は，さらに多少制約のきついものになっている．

[48] このような，制限された普通の場合と異なる規則によって与えられた述語計算で，論理式の除去を許さないが，前と同じ導出可能な論理式の集合を与えるようなものの体系的な研究は，ゲンツェン（G. Genzen）の論文 "Untersuchung über das logische Schließen"（223 ページの脚注参照）で始められた．ゲンツェンは，この考察に基づいて，Sequenz 計算を定義した．同様の考察が我々の論理式計算でも行えることは，シュッテの上記の論文 "Schlußweisenkalküle der Prädikatenlogk" で示されている．

[49] ここでの変形は，Dreben と Denton の証明での煩雑さの原因となっている，変形規則（règles de passage）を必要としないことに注意しよう．

5.4 純粋な述語計算における反駁可能性の判定条件

エルブランの定理は，定理 a)，b) の形以外にも，エルブラン自身のこの定理のもともとの定式化で，意味論により密着した形のものがある．これの一般的な形の記述はいささか煩雑なものとなるが，それに対して，純粋な述語計算に限って考えると，ずっと見通しのよいものが得られる．

この形のエルブランの定理を得るために，まず，スコーレム標準型

$$(E\mathfrak{x}_1)\dots(E\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(\mathfrak{y}_1)\dots(\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\mathfrak{y}_1,\dots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

の形をした論理式 $\mathfrak{E}$ で，式の初めに，存在記号も全称記号も少なくとも 1 つは実際に持ち，論理記号以外の記号は含まず，自由個体変数も含まず，束縛変数も $\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{y}_\mathfrak{r}$ 以外には含まないようなものを考えてみよう[50]．論理式 $\mathfrak{E}$ が導出可能な論理式なら，エルブランの定理の命題 a) により，命題論理で真な，あるいは——これと同じことだが——命題計算で導出できる離接論理式

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1^{(1)}\dots\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(1)},\varphi_1(\mathfrak{t}_1^{(1)}\dots\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(1)}),\dots,\varphi_\mathfrak{s}(\mathfrak{t}_1^{(1)}\dots\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(1)}))\\&\qquad\vee\dots\vee\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{m})}\dots\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{m})},\varphi_1(\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{m})}\dots\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{m})}),\dots,\varphi_\mathfrak{s}(\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{m})}\dots\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{m})}))\end{aligned}$$

で，項 $\mathfrak{t}_1^{(1)},\dots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{m})}$ は個体変数と関数記号 $\varphi_1,\dots,\varphi_\mathfrak{s}$ から形成されているようなものが求まる．

この離接論理式で，そこに現れる項に，初等論理式の間の一致を保つような置き換えを施すことにより，再び，命題計算で導出可能な論理式が得られる．このような置き換えは，特に，次のように行うことができる．まず，項 $\mathfrak{t}_1^{(1)},\dots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{m})}$ のうち，項 $\varphi_\mathfrak{i}(\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{j})},\dots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{j})})$, $(\mathfrak{i}=1,\dots,\mathfrak{s},\ \mathfrak{j}=1,\dots,\mathfrak{m})$ と一致しないようなもの全てを，これらが，その項自身，あるいは，関数 $\varphi_1,\dots,\varphi_\mathfrak{s}$ のパラメータとして現れる全ての場所で，数表記 0 により置き換える．これによって得られる離接論理式 $\mathfrak{D}$ では，そこに現れる項は，全て数表記 0 と関数記号 $\varphi_1,\dots,\varphi_\mathfrak{s}$ から形成されることになる．

ここで，関数記号 $\varphi_1,\dots,\varphi_\mathfrak{s}$ を，数表記の $\mathfrak{r}$-組を，ある計算則によって，再び 1 つの数表記に対応させるような，$\mathfrak{s}$ 個の算術的関数と解釈する．これにより，離接論理式 $\mathfrak{D}$ に現れる項に対する付値が決まることになり，$\mathfrak{D}$ に現れる

---

[50] $\mathfrak{s}=0$ かつ $\mathfrak{r}=0$ の場合は，直接，初等的な考察により扱うことができる．原書 I，190–192 ページ参照．

項を，それぞれ，その値としての数表記で置き換えることにより，再び，命題計算で導出可能な離接論理式 $\mathfrak{D}_1$ が得られる．$\mathfrak{D}_1$ は

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r}, \mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_\mathfrak{s})$$

という形の離接節からなる．ここに，$\mathfrak{n}_1,\ldots,\mathfrak{n}_\mathfrak{r}$ は数表記で，$\mathfrak{k}_\mathfrak{i}$ $(\mathfrak{i}=1,\ldots,\mathfrak{s})$ は $\varphi_\mathfrak{i}(\mathfrak{n}_1,\ldots,\mathfrak{n}_\mathfrak{r})$ の値である．

さて，$\mathfrak{D}_1$ で $\mathfrak{E}$ の存在変数に対応する場所に現れる数表記 $\mathfrak{n}_1,\ldots,\mathfrak{n}_\mathfrak{r}$ のうち，$\mathfrak{p}$ を最大のものとすれば，$\mathfrak{D}_1$ は，$(\mathfrak{p}+1)^\mathfrak{r}$ 個の離接節

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{n}_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}}, \mathfrak{k}_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, \mathfrak{k}_{\mathfrak{s},\mathfrak{j}})$$

からなる離接論理式の部分離接論理式となる．ここに，$\mathfrak{j}$（離接節の番号）は 0 から $(\mathfrak{p}+1)^\mathfrak{r}-1$ まで動き，$\mathfrak{k}_{\mathfrak{i},\mathfrak{j}}$ $(\mathfrak{i}=1,\ldots,\mathfrak{s})$ は $\varphi_\mathfrak{i}(\mathfrak{n}_{1,\mathfrak{j}},\ldots,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}})$ の値で，

$$\mathfrak{n}_{1,0}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},0}, \ldots, \quad \mathfrak{n}_{1,(\mathfrak{p}+1)^\mathfrak{r}-1}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},(\mathfrak{p}+1)^\mathfrak{r}-1}$$

は，数表記 $\leq \mathfrak{p}$ の互いに異なる $\mathfrak{r}$-組の全てを，ある順序で並べたものとする．ここで，$\mathfrak{r}$-組を並べる順序は，それぞれの最大値が異なるような，2 つの $\mathfrak{r}$-組のうちでは，最大値が小さいほうが先にあり，それぞれの最大値が等しいような，2 つの $\mathfrak{r}$-組のうちでは，これらの $\mathfrak{r}$-組が異なる最初の場所で，小さい数表記が現れるほうの $\mathfrak{r}$-組のほうが先にあるようなものとする．

ここに述べたような離接論理式を“$\mathfrak{E}_\mathfrak{p}^{(\varphi)}$”と表すことにする．この離接論理式は，$\mathfrak{D}_1$ を部分離接論理式として含むから，やはり，命題計算で導出可能となる．

一般には，数表記 $\mathfrak{q}$ と $\mathfrak{s}$ 個の $\mathfrak{r}$ 変数の算術的関数 $\psi_1,\ldots,\psi_\mathfrak{s}$ の系——このようなもので値の計算法が与えられているもの，あるいは数表記 $\leq \mathfrak{q}$ の $\mathfrak{r}$-組に対し，その値が数表として直接与えられているもの——に対し，“$\mathfrak{E}_\mathfrak{q}^{(\psi)}$”で，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{n}_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}}, \mathfrak{l}_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, \mathfrak{l}_{\mathfrak{s},\mathfrak{j}}),$$

$\mathfrak{j}=0,\ldots,(\mathfrak{q}+1)^\mathfrak{r}-1$，という形の離接節を持つ離接論理式を表す．ここに，$(\mathfrak{n}_{1,\mathfrak{j}},\ldots,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}})$ は，$(\mathfrak{q}+1)^\mathfrak{r}$ 個の，互いに異なる数表記 $\leq \mathfrak{q}$ の $\mathfrak{r}$-組を枚挙し，これらは，前に述べたような順序に並べられているものとする．また，$\mathfrak{l}_{\mathfrak{i},\mathfrak{j}}$ は $(\mathfrak{i}=1,\ldots,\mathfrak{s}$ に対し），

$$\psi_\mathfrak{i}(\mathfrak{n}_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}})$$

の値を表す．

このような離接論理式について，これが命題計算で導出可能かどうかを，直接的に確かめることができる．このためには，そこに現れる，互いに異なる初等論理式に，互いに異なる，無変数の論理式変数を代入して，これが命題計算で恒真かどうかを調べればよい．

数表記 $\mathfrak{k}$ が $\mathfrak{q}$ より小さければ，$\mathfrak{E}_{\mathfrak{k}}^{(\varphi)}$ は $\mathfrak{E}_{\mathfrak{q}}^{(\varphi)}$ の部分離接論理式となる．したがって，$\mathfrak{E}_{\mathfrak{k}}^{(\varphi)}$ が命題計算で導出できれば，$\mathfrak{E}_{\mathfrak{q}}^{(\varphi)}$ も命題計算で導出できることになる．

したがって，前に行った考察の結果は，述語計算での論理式 $\mathfrak{E}$ の導出により，任意に選ばれた計算可能な $\mathfrak{r}$ 変数の算術的関数 $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathfrak{s}}$ に対し，常に，数表記 $\mathfrak{p}$ で，$\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ が命題計算で導出可能となるものを決定することができると述べることができるようになる．ここで，算術的規定により定義された関数 $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathfrak{s}}$ が考察の対象となっていることは，本質的でなく，表現 $\varphi_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r}})$ $(\mathfrak{i} = 1, \ldots, \mathfrak{s})$ に対し，数表記の値の選択は逐次的に行われれば十分で，値を確定するべき $\mathfrak{r}$-組の数表記の領域は，選ばれた関数値 $\varphi(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r}})$ により，命題計算で導出可能な離接論理式 $\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ が得られるまで段階的に拡張していけばよいというようにすれば十分なので，これにより，この定理を，さらに多少拡張された形にすることができる．

いずれにしても，ここで述べたような命題計算で導出可能な離接論理式 $\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ が最後には得られることは，前に行った考察から導かれる．つまり，我々の定理で問題となっている数表記 $\mathfrak{p}$ は，離接論理式 $\mathfrak{D}$ の離接節に現れる $\mathfrak{E}$ の存在変数に対応するような表現の付値の数表記による値のうち，最大のものとして得られたのであった．この際，付値は，関数記号 $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathfrak{s}}$ を，ある算術的関数を表すものとして解釈したときに得られたものであった．しかし，ここでの付値は，まず，そこに現れる全ての $\varphi_{\mathfrak{i}}(0, \ldots, 0)$ $(\mathfrak{i} = 1, \ldots, \mathfrak{s})$ という形の項に，ある数表記の値を対応させ，これを相当する表現のところに記入して，それによって生じる，数表記 $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r}}$ に対する新しい項 $\varphi_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{n}_1, , \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r}})$ の数表記の値を決めて，この値を再び記入し，というように繰り返して，これを，論理式 $\mathfrak{D}$ に現れる項の全てが値を得るまで続けることで決めることができる．ただし，この際に，同一の表現 $\varphi_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r}})$ は同一の値をとるように注意する必要がある．

この手続きにより，($\mathfrak{D}$ の離接節で) $\mathfrak{E}$ の存在変数に相当する項が得る数表記

の値のうち，$\mathfrak{p}$ が最大のものとして，0 から $\mathfrak{p}$ までの間の数表記 $\mathfrak{n}_1,\ldots,\mathfrak{n}_\mathfrak{r}$ で表現 $\varphi_\mathfrak{i}(\mathfrak{n}_1,\ldots,\mathfrak{n}_\mathfrak{r})$ が，まだ値を得ていないもの全てについて数表記の値を確定して，関数 $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ が，全て 0 から $\mathfrak{p}$ までの間の数表記の区間で定義されているようにしたとき（これらの関数は，これ以外の幾つかの $\mathfrak{r}$-組に対しても定義されていることもありうる），これにより，離接論理式 $\mathfrak{E}_\mathfrak{p}^{(\varphi)}$ を構成することができるようになる．これは，$\mathfrak{D}$ から，そこに現れる項を，その数表記の値で置き換えることで得られる離接論理式 $\mathfrak{D}_1$ を，部分離接論理式として含んでいるから，$\mathfrak{D}$ と同様に，命題計算で導出可能となる．

この手続きにおいては，関数 $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ の，0 から $\mathfrak{p}$ の間の区間における値は，(パラメータの値ごとに一意に決まっているという条件を除いて）まったく何の制限も受けない．したがって，$\mathfrak{r}$-組を，我々の選んだ順序に従って 1 つ 1 つその $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ による数表記の値をまったく任意に決めていき，その関数値により，順次に論理式 $\mathfrak{E}_0^{(\varphi)}$，$\mathfrak{E}_1^{(\varphi)}$，$\mathfrak{E}_2^{(\varphi)}$，... をつくっていけば，命題計算で恒真な論理式から代入によって得られるような $\mathfrak{E}_\mathfrak{p}^{(\varphi)}$ に行き着くことができる．

（ここで，数表記 $\mathfrak{p}$ は関数値の選び方に依存する．依存の様子は離接論理式 $\mathfrak{D}$ の形態からみてとることができる．）

無限に続くまったく任意な選択による付値の列をブラウアー（BROUWER）は“選択列”と呼んだ．ここで考察した関数の $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ の順次的な定義はこのような選択列の例となっている．

ここで得られた導出可能性の判定条件に対して，次のような逆の命題が成り立つ:

数表記 $\mathfrak{p}$ と 0 から $\mathfrak{p}$ までの数表記の区間上で定義された，ある算術的関数 $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ に対し，論理式 $\mathfrak{E}_\mathfrak{p}^{(\varphi)}$ が命題計算で導出可能で，関数 $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ が数表記 $\leq \mathfrak{p}$ の $\mathfrak{r}$-組に対し，条件

$$\{1\}\qquad \varphi_\mathfrak{i}(\mathfrak{n}_1,\ldots,\mathfrak{n}_\mathfrak{r}) > \mathfrak{n}_\mathfrak{j} \qquad (\mathfrak{i}=1,\ldots,\mathfrak{s},\ \mathfrak{j}=1,\ldots,\mathfrak{r}),$$

および

$$\{2\}\ \mathfrak{i}=\mathfrak{k}, \mathfrak{m}_1=\mathfrak{n}_1,\ldots,\mathfrak{m}_\mathfrak{r}=\mathfrak{n}_\mathfrak{r} \text{ でないなら，}\quad \varphi_\mathfrak{i}(\mathfrak{m}_1,\ldots,\mathfrak{m}_\mathfrak{r}) \neq \varphi_\mathfrak{k}(\mathfrak{n}_1,\ldots,\mathfrak{n}_\mathfrak{r})$$

が満たされている場合には，$\mathfrak{E}$ の述語計算での導出が得られる．

なぜなら，$\mathfrak{E}_\mathfrak{p}^{(\varphi)}$ とともに，$\mathfrak{E}_\mathfrak{p}^{(\varphi)}$ の離接節に（$\mathfrak{E}$ の束縛変数に対応して）現

れるおのおのの数表記 $\mathfrak{z}$ を，対応する添数付きの変数 $a_{\mathfrak{z}}$ で置き換えることによって $\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ から得られる離接論理式 $\widetilde{\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}}$ も命題計算で導出可能となる．この離接論理式は，離接節

$$\mathfrak{A}(a_{\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}}}, \ldots, a_{\mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}}}, a_{\mathfrak{k}_{1,\mathrm{j}}}, \ldots, a_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{s},\mathrm{j}}})$$

$$(\mathrm{j} = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^{\mathfrak{r}} - 1, \quad \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathfrak{s} \text{ に対し } \mathfrak{k}_{\mathrm{i},\mathrm{j}} = \varphi_{\mathrm{i}}(\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}}))$$

からなり，この論理式は，したがって，純粋な述語計算の論理式となるが，関数 $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathfrak{s}}$ の満たしている条件 {1}，{2} により，第 2 ε-定理の証明で論理式 (3*) に対して行ったように[51]，規則 (μ)，(ν) の適用で，全ての離接節が $\mathfrak{E}$ と等しいような離接論理式が得られ，したがって，命題計算によりこれを $\mathfrak{E}$ に変形することができる．この $\mathfrak{E}$ の $\widetilde{\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}}$ からの導出と，$\widetilde{\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}}$ が命題計算で真の論理式への代入で得られていることから，$\mathfrak{E}$ の述語計算での導出が得られる．

条件 {1}，{2} は，有限の数の区間上だけでなく，無限の区間上で，関数系 $\varphi_1(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r}}), \ldots, \varphi_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r}})$ によっても満たされている．このような関数の系は，どの関数の値も，そのパラメータのうちの全ての値より大きくなり，全ての数値は，たかだか 1 つの関数の唯一のパラメータの組により値としてとられうるという性質によって特徴づけられる．このような性質を持つ関数の系を“離散的関数系”と呼ぶことにする．

このような関数系を得るための，1 つの方法としては，数表記の $\mathfrak{r}$-組 $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r}}$ の 1 つ 1 つに，異なる数値を対応させる関数 $\varphi(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r}})$ で，関数値が，パラメータのどの値よりも大きくなるようなものから出発して，

$$\varphi_{\mathrm{i}}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r}}) = \mathfrak{s} \cdot \varphi(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r}}) + \mathrm{i} \qquad (\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathfrak{s})$$

と置くことにより得られる．

上のような性質を持つ関数 $\varphi(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r}})$ としては，例えば，数表記の $\mathfrak{r}$-組に対し，前に導入した $\mathfrak{r}$-組の順序

$$\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}} \qquad (\mathrm{j} = 0, 1, \ldots)$$

（つまり，まず，$\mathfrak{r}$-組の最大数により，残りは辞書式で並べたもの）で，この $\mathfrak{r}$-組の現れる番号 j を対応させるものがとれる．

---

[51] 194–197 ページ参照．

したがって，我々の数表記の $\mathfrak{r}$-組の順序づけにより，

$$\varphi_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{n}_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}}) = \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{j} + \mathfrak{i} \qquad (\mathfrak{i} = 1, \ldots, \mathfrak{s}, \mathfrak{j} = 0, 1, \ldots)$$

という等式により，１つの離散的関数系が定められる．

注意．　算術的にみて特に簡単な，$\mathfrak{r}$-変数関数からなる離散的関数系として，さらに次の２つをあげておこう:

1. 関数

$$\varphi(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r}) = \mathfrak{n}_1 + \binom{\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2 + 1}{2} + \binom{\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2 + \mathfrak{n}_3 + 2}{3} + \cdots + \binom{\mathfrak{n}_1 + \cdots + \mathfrak{n}_\mathfrak{r} + (\mathfrak{r} - 1)}{\mathfrak{r}}$$

は，ある $\mathfrak{r}$-組の枚挙における $\mathfrak{r}$-組 $\mathfrak{n}_1,\ldots,\mathfrak{n}_\mathfrak{r}$ の番号で，この番号は $\mathfrak{r}$-組のどの数より大きくなることが，容易に示せる．したがって，この関数 $\varphi(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r})$ により，離散的関数系

$$\varphi_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r}) = \mathfrak{s} \cdot \varphi(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r}) + \mathfrak{i} \qquad (\mathfrak{i} = 1, \ldots, \mathfrak{s})$$

が得られる．

2. $\wp_0$，$\wp_1,\ldots,\wp_\mathfrak{r}$ を最初の $\mathfrak{r}+1$ 個の素数とすれば，関数

$$\varphi_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r}) = \wp_0^{\mathfrak{i}} \cdot \wp_1^{\mathfrak{n}_1} \cdot \cdots \cdot \wp_\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}_\mathfrak{r}} \qquad (\mathfrak{i} = 1, \ldots, \mathfrak{s})$$

は，容易にわかるように，離散的関数系を形成する．

ここまでの結果を要約すると次のようになる: 述語計算の論理式 $\mathfrak{E}$ が導出可能であるための必要十分条件は，数表記 $\mathfrak{p}$ と離散的関数系 $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ で，離接論理式 $\mathfrak{E}_\mathfrak{p}^{(\varphi)}$ が命題計算により導出可能となる[52]ようなものが求まることである．さらに，$\mathfrak{E}$ が導出できる場合には，任意の計算可能な関数の系 $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$

[52] ここでの記述で，関数系 $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ が離散的であるという条件を取り去ることができないこと，言い換えれば，任意の関数系 $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ と数表記 $\mathfrak{p}$ で $\mathfrak{E}_\mathfrak{p}^{(\varphi)}$ が命題計算で導出可能であるようなものの存在が，一般には論理式 $\mathfrak{E}$ の導出可能性のために十分でないことは，次の例によってみることができる: $\mathfrak{E}$ を論理式

$$(E\,x)(y)(\overline{A(x,x)} \vee A(x,y))$$

とする．ここでは $\mathfrak{r}$ も $\mathfrak{s}$ も 1 となる．$\varphi(\mathfrak{n})$ を常に値 0 をとる関数とする．このとき，$\mathfrak{E}_0^{(\varphi)}$

に対し，数表記 $\mathfrak{p}$ で $\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ が命題計算で導出可能になるようなものが求められる．このときには，より大きな数表記 $\mathfrak{q}$ に対して，同じ関数 $\varphi_1,\dots,\varphi_{\mathfrak{s}}$ に関する $\mathfrak{E}_{\mathfrak{q}}^{(\varphi)}$ は命題計算で導出可能となる．同様に，逐次的に定義される関数の系 $\varphi_1,\dots,\varphi_{\mathfrak{s}}$ に対しても，$\mathfrak{E}^{(\varphi)}\mathfrak{p}$ 命題論理で導出可能となるような数表記 $\mathfrak{p}$ が求まる．

この結果は，この形のままでは，まだ，それほど扱いやすいものとなってない．しかし，簡単な変形と意味論的解釈により，これから，より見通しのよい形のものが得られる．

変形は，論理式の**導出可能性**に関する問題を，それに**双対な形の**論理式の“反駁可能性”の問題に変換することで得られる．すでに，前に定義したように[53]述語計算の論理式の反駁可能性とは，その否定の導出可能性のことである．

$$(E\,\mathfrak{x}_1)\dots(E\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}})(\mathfrak{y}_1)\dots(\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})$$

という形の述語論理の論理式 $\mathfrak{E}$ で，$\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}}$ 以外に個体変数の現れないようなものは，論理式

$$(\mathfrak{x}_1)\dots(\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}})(E\,\mathfrak{y}_1)\dots(E\,\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})$$

という形の論理式の否定に書き直せる．ここに，$\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})$ は，$\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})$ の否定，あるいは，この否定を変形したものである．逆に，

$$(\mathfrak{x}_1)\dots(\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}})(E\,\mathfrak{y}_1)\dots(E\,\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})$$

という形の述語計算の論理式 $\mathfrak{F}$ から出発すると，これの反駁可能性は，論理式

$$(E\,\mathfrak{x}_1)\dots(E\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}})(\mathfrak{y}_1)\dots(\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})} \tag{4}$$

の導出可能性と同値になる．ここで，$\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}}$ 以外の変数が $\mathfrak{F}$ に現れず，$\mathfrak{r}\neq 0$, $\mathfrak{s}\neq 0$ なら，論理式 (4) は，すぐ前で述べた考察において，論理式 $\mathfrak{E}$ に対して

は

$$\overline{A(0,0)}\vee A(0,0)$$

となるが，これは命題計算で導出可能である．一方，論理式 $\mathfrak{E}$ は導出可能でない．これは，例えば，この論理式が，2 数に対し恒真でないことからわかる．

[53]原書 I，128 ページ参照.

課した条件を全て満たしている．したがって，この考察での結果を論理式 (4) に対して適用することができる．ここでただちに，

$$\overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r}, \mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_\mathfrak{s})}$$

という形の離接節を持った離接論理式が，命題計算により，対応する合接節

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r}, \mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_\mathfrak{s})$$

を持つ合接論理式の否定に変形できるという事実により，離接論理式 $\mathfrak{E}_\mathfrak{p}^{(\varphi)}$ に対応する合接論理式が導入される．

$$(\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(E\,\mathfrak{y}_1)\ldots(E\,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\mathfrak{s}) \qquad \mathfrak{r}, \mathfrak{s} \neq 0$$

という形の述語計算の論理式 $\mathfrak{F}$ で，$\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\mathfrak{s}$ 以外の個体変数の現れないものと，数表記 $\mathfrak{p}$ と，計算可能な $\mathfrak{r}$ 変数の算術的関数の系 $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mathfrak{s}$ に対し，“$\mathfrak{F}_\mathfrak{p}^{(\varphi)}$” で，

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}}, \mathfrak{k}_{1,\mathrm{j}}, \ldots, \mathfrak{k}_{\mathfrak{s},\mathrm{j}})$$

$$(\mathrm{j} = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^\mathfrak{r} - 1, \quad \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathfrak{s} \text{ に対し } \mathfrak{k}_{\mathrm{i},\mathrm{j}} = \varphi_\mathrm{i}(\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}}))$$

という節を持つ**合接論理式**を表す．ここに，$(\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}})$ は，$(\mathfrak{p}+1)^\mathfrak{r}$ 個の，数表記 $\leq \mathfrak{p}$ の $\mathfrak{r}$-組を枚挙するものとする（この際の順序は，まず，そこに現れる最大の数により，残りは辞書式順序によって定められる）．

この論理式 $\mathfrak{F}$ へ，前に得た結果を応用すると次のようになる．述語計算の論理式 $\mathfrak{F}$ が反駁可能なら，$\mathfrak{F}$ の反駁から，任意の計算可能な $\mathfrak{r}$ 変数の算術的関数の系 $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mathfrak{s}$ に対し，数表記 $\mathfrak{p}$ で，合接論理式 $\mathfrak{F}_\mathfrak{p}^{(\varphi)}$ が命題計算で反駁可能となるようなものが求まる．つまり，この合接論理式は，命題計算の恒真な論理式の否定から代入によって得られるようなものになっている．このような数表記 $\mathfrak{p}$ は，逐次的な（選択列[54]による）定義で与えられる関数系に対しても得ることができる．逆に，論理式 $\mathfrak{F}_\mathfrak{p}^{(\varphi)}$ が，ある数表記 $\mathfrak{p}$ と，離散的関数系 $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mathfrak{p}$ に対し命題計算で反駁可能なら，この反駁可能性から，$\mathfrak{F}$ の述語計算での反駁を得ることができる．

ここで，論理式 $\mathfrak{F}_\mathfrak{p}^{(\varphi)}$ の命題計算での反駁可能性が，何を 意味するかを考えてみよう．まず，これは，この論理式が命題計算の恒真な論理式の否定から代入により得られることを意味する．このことは，また——論理式 $\mathfrak{F}_\mathfrak{p}^{(\varphi)}$ は束縛

[54] 237 ページ参照．

変数を含まないから――$\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ に現れる互いに異なる初等論理式に任意の真偽値を割り当てたとき，全体の論理式は（命題計算の記号の真偽値関数としての解釈により），常に“偽”の値を得るということでもある．

さらに，$\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ が，節

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},j}, \mathfrak{k}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{k}_{\mathfrak{s},j})$$

$$(j = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^{\mathfrak{r}} - 1)$$

（ここに，$\mathfrak{i} = 1, \ldots, \mathfrak{s}$ に対し，$\mathfrak{k}_{i,j}$ は $\varphi_i(\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},j})$ の値である）からなる合接論理式で，$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{k}_{\mathfrak{s},j})$ は $\mathfrak{F}$ に含まれるもの以外の論理式変数を含まず，また，数表記 $\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{k}_{\mathfrak{s},j}$ 以外の項を含まないことを考慮すると，$\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ の命題計算での反駁可能性は，$\mathfrak{F}$ の論理式変数を，同じパラメータの数を持つ $\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ に現れる数表記の領域内で定義された任意の論理関数で（変数を持たない論理式変数については，任意の真偽値で[55]）置き換えても，論理式 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ は（これらの論理関数の値のとり方と，命題論理の記号の真偽値関数としての解釈に関して）“偽”の値をとるということと同値になることがわかる．

これと反対の“$\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ の命題計算による反駁不可能性”は，$\mathfrak{F}$ の論理式変数の論理関数による置き換えの可能性のうち――$\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ に現れる数表記の領域は限られているから，考察の対象となる，値のとり方の可能性は有限個しか存在しない――少なくとも 1 つにより，論理式 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ は真偽値“真”を得るということになる．別のいい方をすれば，命題計算での論理式 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ の反駁不可能性は，論理式 $\mathfrak{F}$ の論理式変数の置き換えとしての論理関数を，うまく選ぶことにより，

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},j}, \mathfrak{k}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{k}_{\mathfrak{s},j})$$

$$j = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^{\mathfrak{r}} - 1$$

で $\mathfrak{k}_{i,j}$ は $\varphi_i(\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},j})$ の値であるようなものについて，これらが全て真偽値“真”を得るようにできるということである．

このような論理関数をとることが可能であることを，手短かに，論理式

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},j}, \varphi_1(\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},j}), \ldots, \varphi_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},j}))$$

$$j = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^{\mathfrak{r}} - 1$$

---

[55] この真偽値は 0 変数の論理関数とみなすことができる．

は，算術関数 $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathfrak{s}}$ に対し，“同時に充足できる”ということにする[56].

ここで，この充足可能性は，$\mathfrak{F}$ の論理式変数に対応して現れる論理関数によるものであって，この際，おのおのの論理関数は対応する論理式変数と同じ数のパラメータを持ち，パラメータを持たない論理式変数については，単に真偽値となっている．さらに，これらの論理関数は，そこに現れる有限個の数表記の領域に対して（あるいは，0 からそこに現れる最大の数表記までの区間に対して）のもので十分である．数表記の領域が限定されていることにより，上の意味での同時的な充足性の命題も有限的なものとなる．

この考察の結果として得られた

$$(\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}})(E\,\mathfrak{y}_1)\ldots(E\,\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\mathfrak{r}}, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})$$

という形の述語計算の論理式 $\mathfrak{F}$ で，$\mathfrak{r}$，$\mathfrak{s} \neq 0$ となっており，$\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{\mathfrak{r}}$ 以外の個体変数が現れないようなものに対する反駁可能性の判定条件は，再び，数表記の $\mathfrak{r}$-組の枚挙

$$\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}} \qquad (\mathrm{j} = 0, 1, \ldots)$$

を用いることで，以下のような，より見通しのよい記述を与えることができる:

1. 述語計算の論理式 $\mathfrak{F}$ が反駁可能なとき，任意の計算可能な $\mathfrak{r}$ 変数の算術的関数の系 $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathfrak{s}}$ に対して，$\mathfrak{F}$ の反駁から求められる数表記 $\mathfrak{p}$ から先に対し，論理式

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}}, \varphi_1(\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}}), \ldots, \varphi_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}}))$$

$$\mathrm{j} = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^{\mathfrak{r}} - 1$$

は，同時に充足できなくなる．

2. 述語計算の論理式 $\mathfrak{F}$ が反駁可能であるとき，任意の逐次的に決められる数表記の $\mathfrak{s}$-組の選択列

$$\mathfrak{k}_{1,\mathrm{j}}, \ldots, \mathfrak{k}_{\mathfrak{s},\mathrm{j}}, \qquad \mathrm{j} = 0, 1, \ldots$$

に対し,（選択列の構成の過程において $\mathfrak{F}$ の反駁をもとに求められる）ある数表記 $\mathfrak{p}$ から先では，

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}}, \mathfrak{k}_{1,\mathrm{j}}, \ldots, \mathfrak{k}_{\mathfrak{s},\mathrm{j}})$$

[56]訳注: このような論理関数の系を，これらの論理式の同時的な充足と呼ぶことにする．

$$\mathfrak{j} = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^{\mathfrak{r}} - 1$$

は，同時に充足できなくなる[57]．

3. ある数表記 $\mathfrak{p}$ と，計算可能な算術的関数 $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathfrak{s}}$ からなる離散的関数系[58]に対し，論理式

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}}, \varphi_1(\mathfrak{n}_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}}), \ldots, \varphi_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{n}_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}})),$$
$$\mathfrak{j} = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^{\mathfrak{r}} - 1$$

が，同時に充足できないとすると，この論理式列の充足不可能性から，論理式 $\mathfrak{F}$ の述語計算での反駁が得られる．

これらの主張 1.，2.，3. のうち，最初のものは，2 番目のものからただちにわかる．計算可能な $\mathfrak{r}$ 変数関数 $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathfrak{s}}$ を用いて，$\mathfrak{k}_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, \mathfrak{k}_{\mathfrak{s},\mathfrak{j}}$ として，それぞれ関数 $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathfrak{s}}$ の $\mathfrak{r}$-組 $\mathfrak{n}_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}}$ での値をとることにより，選択列を構成することができるからである．

判定条件 1.，2. は，反駁可能性の必要条件で，3. は反駁可能性の十分条件となっている．この十分条件は必要条件より弱いものとなっているから，**これらの条件の全ては，$\mathfrak{F}$ の述語計算での反駁可能性の必要十分条件となっている．**

これらの判定条件 1.，2.，3. から，

$$(\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}})(E\,\mathfrak{y}_1)\ldots(E\,\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\mathfrak{r}}, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})$$

---

[57] この判定条件は，$\mathfrak{F}$ が反駁可能なときには，ある数表記 $\mathfrak{p}$ 以降では，$\mathfrak{s}$-組

$$\mathfrak{k}_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, \mathfrak{k}_{\mathfrak{s},\mathfrak{j}}, \qquad \mathfrak{j} = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^{\mathfrak{r}} - 1$$

で，論理式

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}}, \mathfrak{k}_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, \mathfrak{k}_{\mathfrak{s},\mathfrak{j}})$$

を同時に充足するようなものは存在しないというもう少し簡単な条件で置き換えられるように思えるかもしれない．そうであれば，ここで，わざわざ選択列の概念を用いる必要はなくなる．

しかし，実際には，この，より簡単な条件は，ここで考察している特殊な形をした反駁可能な論理式の全てが満たすようにはならない．これは，すでに論理式

$$(x)(E\,y)(A(x)\,\&\,\overline{A(y)})$$

の例で示せる．この論理式は，反駁可能であるが，一方，全ての数表記 $\mathfrak{p}$ に対し，論理式

$$A(\mathfrak{j})\,\&\,\overline{A(\mathfrak{p}+1)}, \qquad \mathfrak{j} = 0, \ldots, \mathfrak{p}$$

は同時に充足できる．

[58] 238 ページを参照．

という形をした論理式で，$\mathfrak{r}$，$\mathfrak{s} \neq 0$，かつ $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\mathfrak{s}$ 以外の個体変数の現れないようなものの反駁不可能性に関する次のような公式が得られる:

1*. 述語計算で $\mathfrak{F}$ が反駁不可能であることを示すためには，計算可能な $\mathfrak{r}$ 変数の算術的関数の系 $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mathfrak{s}$ で任意の数表記 $\mathfrak{p}$ に対し，論理式

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},j}, \varphi_1(\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},j}), \ldots, \varphi_\mathfrak{s}(\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},j})),$$

$$j = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^\mathfrak{r} - 1$$

が同時に充足されるようなものの存在を示すことができれば十分である.

2*. 述語計算で $\mathfrak{F}$ が反駁不可能であることを示すためには，ある数表記の $\mathfrak{s}$-組の列（選択列）

$$\mathfrak{k}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{k}_{\mathfrak{s},j} \qquad j = 0, 1, \ldots$$

を，これらの $\mathfrak{s}$-組が，$j = (\mathfrak{p}+1)^\mathfrak{r} - 1$ 番目まで構成されたとき，論理式

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},j}, \mathfrak{k}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{k}_{\mathfrak{s},j})$$

$$j = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^\mathfrak{r} - 1$$

が，同時に充足されるように次々に延ばしてゆくことが可能であることが示せれば十分である.

3*. 論理式 $\mathfrak{F}$ が，述語計算で反駁不可能であることが示されているとき，任意の $\mathfrak{r}$ 変数の計算可能な関数からなる離散的関数系 $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mathfrak{s}$ と数表記 $\mathfrak{p}$ に対し，論理式

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},j}, \varphi_1(\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},j}), \ldots, \varphi_\mathfrak{s}(\mathfrak{n}_{1,j}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},j}))$$

$$j = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^\mathfrak{r} - 1$$

は同時に充足できる.

この形での判定条件は，1 階の論理での形式的公理体系の無矛盾性の問題に応用する際に，扱いやすい. 無矛盾性の問題は，述語計算での論理式の反駁不可能性の問題として捉えられるからである.

しかし，判定条件の，この種の定式化は——それが定理ではなく，意味の解釈によって得られた公式にすぎない，という点を除いても——有限的な考察に

おいて，判定条件 1.，2.，3. の内容全部を反映しているわけではない点に注意する必要がある．

このことを，判定条件 1. でみてみよう．この判定条件は，論理式 $\mathfrak{F}$ の反駁の存在により，全ての計算可能な関数の系 $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ に対し，数表記 $\mathfrak{p}$ で，直接的に検証の可能なある性質 $\mathfrak{Q}(\mathfrak{p},\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s})$ が成り立つという内容のものになっている．

このことから，計算可能な関数の系 $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ で，全ての数表記 $\mathfrak{p}$ に対し，性質 $\overline{\mathfrak{Q}(\mathfrak{p},\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s})}$ を持つことが示せるようなものを与えることで，$\mathfrak{F}$ の反駁不可能性が証明できることを帰結したのが，判定条件 1*. の内容であった．ところが，論理式 $\mathfrak{F}$ の反駁が与えられている場合に，この判定条件から帰結できるのは，このような計算可能な関数の系 $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ で，全ての数表記 $\mathfrak{p}$ に対し，性質 $\overline{\mathfrak{Q}(\mathfrak{p},\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s})}$ を持つことを示せるようなものを与えることができないということのみである．これは，別のいい方をすれば，どのように計算可能な関数の系 $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ を選んだとしても，全ての数表記 $\mathfrak{p}$ に対して，関係 $\overline{\mathfrak{Q}(\mathfrak{p},\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s})}$ が成り立っていることの証拠を行うことができないということである．

ところが，このことは，全ての計算可能な関数の系 $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ に対し，数表記 $\mathfrak{p}$ で $\mathfrak{Q}(\mathfrak{p},\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s})$ が成り立つようなものをみつけることができるということを必ずしも意味しない．

同様のことは，判定条件 2. と 2*.，および，3. と 3*. に対してもいえる．

反駁可能性の判定条件 1.，2.，3. は，したがって，有限の立場からは，(これらの意味論的な対偶として) 帰結された反駁不可能性の判定条件 1*.，2*.，3*. に比べて，より強いものとなっている．

ここで，さらに注意を促しておくと，これらの判定条件は，全て，直接には，

$$(\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(E\,\mathfrak{y}_1)\ldots(E\,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

という特殊な形をした論理式で，$\mathfrak{r}$，$\mathfrak{s}\neq 0$ が成り立ち，かつ，$\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s}$ 以外の個体変数の現れないようなもに対してのみ与えられていたのだったが，実は，**任意の**述語計算の論理式の反駁可能性，あるいは，反駁不可能性を調べるために用いることができる．なぜなら，$\mathfrak{C}$ を任意の述語計算の論理式とすると，論理式 $\overline{\mathfrak{C}}$ に対し，これと演繹的に同値なスコーレム標準型で，特に，自由個体変

数を含まないようなものが得られる．この論理式の否定は，

$$(\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(E\,\mathfrak{y}_1)\ldots(E\,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

という形をした論理式 $\mathfrak{F}$ で，$\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s}$ 以外の個体変数の現れないようなものと同値になる．ここで，論理式 $\overline{\mathfrak{C}}$ と $\overline{\mathfrak{F}}$ は演繹的に同値となるから，$\mathfrak{C}$ の反駁から $\mathfrak{F}$ の反駁が得られ，逆も成り立つ．したがって，$\mathfrak{C}$ の反駁不可能性を調べるのは，$\mathfrak{F}$ の反駁不可能性を調べることと同じになる．もし，論理式 $\mathfrak{F}$ の初めに存在記号か全称記号の片方しか置かれていない場合には，初等的な方法により[59]，この論理式が反駁可能であるかどうかが決定できる．もし，この論理式の初めに置かれた全称記号と存在記号の数 $\mathfrak{r}$，$\mathfrak{s}$ が両方とも 0 でない場合には，上に述べた反駁不可能性の判定条件を応用することができる．

しかし，判定条件 1.，2.，3. を，直接，任意の冠頭型論理式，あるいは，冠頭型論理式の合接として得られる述語計算の論理式に対して拡張することもできる．この一般化への第 1 歩として，論理式 $\mathfrak{F}$ に自由変数が含まれる場合を考える．$\mathfrak{F}$ が自由変数を含む場合，上の判定条件に行わなければならない修正は，まず，この論理式で，自由変数を互いに異なる数表記で置き換えて，判定条件 3. では，さらに，関数の系 $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ が離散的であるという条件に，これらの関数の値が $\mathfrak{F}$ の自由変数を置き換えた数表記の値の全てと異なるという条件を付け加えることである．

この修正された判定条件に対する証明のためには，述語計算の論理式 $\mathfrak{E}$ から，自由個体変数を，それぞれ互いに異なる数表記で置き換えることで得られる論理式 $\mathfrak{E}_1$ が述語計算で導出可能であるのは，$\mathfrak{E}$ が述語計算で導出可能となるちょうどそのときに限るという点に注意すればよい．

証明のやり方は，それ以外では前とまったく同様である．相違点は，今度の場合では，離接論理式[60]

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1^{(1)},\ldots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(1)},\varphi_1(\mathfrak{t}_1^{(1)},\ldots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(1)}),\ldots,\varphi_\mathfrak{s}(\mathfrak{t}_1^{(1)},\ldots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(1)}))\\&\qquad\lor\cdots\lor\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{m})},\ldots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{m})},\varphi_1(\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{m})},\ldots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{m})}),\ldots,\varphi_\mathfrak{s}(\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{m})},\ldots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{m})}))\end{aligned}$$

で，項 $\mathfrak{t}_1^{(1)},\ldots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{m})}$ は，数表記であるか，または，数表記を含む可能性があるということと，これに対応して，離接論理式 $\mathfrak{D}$ への移行では，項 $\mathfrak{t}_1^{(1)},\ldots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}^{(\mathfrak{m})}$

---

[59] 少し前にも引用した原書 I，190–192 ページ参照．

[60] 233 ページ参照．

のうち数表記 0 で置き換えられるのはすでに数表記となっておらず，項 $\varphi_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{t}_1^{(\mathfrak{j})}, \ldots, \mathfrak{t}_{\mathfrak{r}}^{(\mathfrak{j})})$ $(\mathfrak{i} = 1, \ldots, \mathfrak{s},\ \mathfrak{j} = 1, \ldots, \mathfrak{m})$ のどれとも等しくないものであるというように変更する必要があることである．上の，関数系 $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathfrak{s}}$ に対する条件の付加は，$\mathfrak{E}$ の離接論理式 $\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}^{(\varphi)}$ からの導出が，ここでも得られるようにするために必要である[61]．

自由変数を持つ論理式での反駁可能性に関する考察は，存在記号が初めに置かれている論理式を考察することに等しい．

なぜなら，述語論理での論理式

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}})$$

で，$\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}$ が，そこに現れる自由変数の全てであるようなものの反駁可能性は，論理式 $\overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}})}$ の導出可能性を意味するが，この論理式は自由変数を束縛変数に置き換えて得られる

$$(\mathfrak{x}_1) \ldots (\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}})\overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}})}$$

という形の論理式と，演繹的に同値になる．したがって，論理式 $\mathfrak{B}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}})$ の反駁可能性は，論理式

$$(E\,\mathfrak{x}_1) \ldots (E\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}})\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}})$$

の導出可能性と同等になる．したがって，その反駁可能性を調べようと思う論理式を与えるときには，その論理式が自由変数を持つときには，その自由変数を束縛変数で置き換えることにより，常に，自由変数を避けることができる．逆に，上の判定条件を用いるときには，束縛変数を自由変数で置き換えることにより，論理式の初めに置かれた存在記号を除去することができる．これらの自由変数は，今度は数表記で置き換えられることになる．これらの数表記は，一般には，0 あるいは 1 から始めて順々にとってゆくことができる．

さて，ここで，判定条件 1.，2.，3. の**任意の冠頭型論理式** $\mathfrak{F}$ で自由変数を持たないものに対する場合についての一般化を書き出してみよう．行わなければならない変更は，それほど多くないので，変更点のみをあげることにする:

1. 判定条件 1.，3. での関数記号 $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathfrak{s}}$ の $\mathfrak{F}$ の存在変数への対応づけは，存在変数 $\mathfrak{y}_{\mathfrak{i}}$ で，少なくとも一つの全称変数がこれの前にあるようなものについ

---

[61] 236–237 ページ参照．

ては，再び，ここでも関数記号 φ_{i} が対応するが，数表記 $\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}},\ldots,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}}$ のうち，$\mathfrak{y}_{\mathrm{i}}$ より前に現れる全称変数に対応するもののみがそのパラメータとなる．同様に，判定条件 2. において，同時に充足されるべき論理式で，$\mathfrak{F}$ での変数 $\mathfrak{y}_{\mathrm{i}}$ に代わって現れることになる数表記 $\mathfrak{k}_{\mathrm{i},\mathrm{j}}$ の選択でも，$\mathfrak{r}$-組 $\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}},\ldots,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}}$ と $\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}^*},\ldots,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}^*}$ が，$\mathfrak{F}$ で，変数 $\mathfrak{y}_{\mathrm{i}}$ より**前に現れる**全称変数に代わって現れる数表記の全てで等しい場合には，$\mathfrak{k}_{\mathrm{i},\mathrm{j}}$ と $\mathfrak{k}_{\mathrm{i},\mathrm{j}^*}$ も等しくなるように注意する必要がある．

2. 論理式 $\mathfrak{F}$ が，その前に全称変数の現れないような存在変数を含んでいる場合には，同時に充足されるべき表現では，それらの変数は数表記で置き換えられる．判定条件 3. では，さらに，関数 $\varphi_1,\ldots,\varphi_{\mathfrak{s}}$ に対し，これらの関数の値は，全て，これらの（全称変数の前に現れないような存在変数を置き換えた）数表記と異ならなくてはならないという条件が付け加えられる．

注意． 存在変数で，その前に全称変数の現れないようなものの判定条件での特別な扱いは，関数記号の列 $\varphi_1,\ldots,\varphi_{\mathfrak{s}}$ に，**変数を持たないもの**も，その前に全称記号の現れないような存在変数に対応するものとして含め，その値は，そのような存在変数に代わって置かれる数表記であるとすることで，避けることができる．こうすることで，判定条件 3. で，**離散的関数系に対する付加条件を付け加える必要がなくなる．**

上に述べた変更は，$\mathfrak{F}$ が冠頭型論理式の合接からなる場合にも有効である．この場合には，存在変数の "前にある" 全称変数というのを，存在変数の属す合接節の中で前にあることと解釈する必要がある．この際，異なる合接節に現れる変数は，同じ名前の場合にも，常に異なるものとして扱う必要がある．

説明のために，この変更された判定条件を

$$(x)(E\,y)(E\,z)(u)(E\,v)\mathfrak{A}(x,y,z,u,v)\,\&\,(E\,x)(E\,y)(z)\mathfrak{B}(x,y,z)$$

という形の論理式 $\mathfrak{F}$ の場合で考察してみよう．ここで，判定条件は次のようなものになる:

1. 論理式 $\mathfrak{F}$ が反駁可能なら，任意の数表記の組 $\mathfrak{z}_1$，$\mathfrak{z}_2$ と，計算可能な算術的関数の 3 つ組 φ_1，φ_2，φ_3 に対し，$\mathfrak{F}$ の反駁をもとにして，数表記 $\mathfrak{p}$ で，論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}},\varphi_1(\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}}),\varphi_2(\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}}),\mathfrak{n}_{2,\mathrm{j}},\varphi_3(\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}},\mathfrak{n}_{2,\mathrm{j}}))\,\&\,\mathfrak{B}(\mathfrak{z}_1,\mathfrak{z}_2,\mathfrak{n}_{3,\mathrm{j}}),$$
$$\mathrm{j}=0,\ldots,(\mathfrak{p}+1)^3-1$$

が同時に充足されないようなものが，求まる．

2. 論理式 $\mathfrak{F}$ が反駁可能なら，$\mathfrak{F}$ の反駁をもとにして，任意の数表記の組 $\mathfrak{z}_1$，$\mathfrak{z}_2$ と，数表記の 3 つ組の選択列 $\mathfrak{k}_{1,j}$，$\mathfrak{k}_{2,j}$，$\mathfrak{k}_{3,j}$ で，$\mathfrak{n}_{1,j}$ と $\mathfrak{n}_{1,j^*}$ が等しいときには $\mathfrak{k}_{1,j}$ と $\mathfrak{k}_{1,j^*}$，および $\mathfrak{k}_{2,j}$ と $\mathfrak{k}_{2,j^*}$ も等しくなり，また，$\mathfrak{n}_{1,j}$ と $\mathfrak{n}_{1,j^*}$，および $\mathfrak{n}_{2,j}$ と $\mathfrak{n}_{2,j^*}$ がそれぞれ等しいときには，$\mathfrak{k}_{3,j}$ と $\mathfrak{k}_{3,j^*}$ も等しくなるようなものに対し，数表記 $\mathfrak{p}$ で

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{n}_{1,j},\mathfrak{k}_{1,j},\mathfrak{k}_{2,j},\mathfrak{n}_{2,j},\mathfrak{k}_{3,j})\,\&\,\mathfrak{B}(\mathfrak{z}_1,\mathfrak{z}_2,\mathfrak{n}_{3,j}),$$
$$j = 0,\ldots,(\mathfrak{p}+1)^3-1$$

が，同時に充足されないようなものが求まる．

3. ある数表記 $\mathfrak{p}$，数表記の組 $\mathfrak{z}_1$，$\mathfrak{z}_2$，および計算可能な 1 変数の算術的関数 φ_1，φ_2 と，2 変数の算術的関数 φ_3 で離散的関数系をなし，これらの値は，常に $\mathfrak{z}_1$ とも $\mathfrak{z}_2$ とも異なるようなものに対し，論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{n}_{1,j},\varphi_1(\mathfrak{n}_{1,j}),\varphi_2(\mathfrak{n}_{1,j}),\mathfrak{n}_{2,j},\varphi_3(\mathfrak{n}_{1,j},\mathfrak{n}_{2,j}))\,\&\,\mathfrak{B}(\mathfrak{z}_1,\mathfrak{z}_2,\mathfrak{n}_{3,j}),$$
$$j = 0,\ldots,(\mathfrak{p}+1)^3-1$$

が同時に充足されないなら，$\mathfrak{F}$ の述語計算での反駁が得られる．

（ここに，3 つの命題の全てで，“$\mathfrak{n}_{1,j}$，$\mathfrak{n}_{2,j}$，$\mathfrak{n}_{3,j}$” は，数表記の 3 つ組の全てを，まず，3 つ組の中の最大の数の順，それから辞書式順序を考えることで得られる順序により枚挙したものの j 番目のものである．）

ここに述べた，判定条件 1.，2.，3. の一般化の証明には，新しいアイデアは何も必要ない．読者は，ここで扱った特殊例の証拠から，エルブランの定理の一般化での証明方法[62]を用いることで自ら証明を得ることができるであろう．

5.5　得られた判定条件の決定性問題への応用

a) 充足可能性に関する一般論，意味論的スコーレム標準型．　得られた反駁可能性の判定条件により，論理式の意味論的解釈に関連した，前に述べたエルブランの定理の変形で，純粋な述語計算の領域に関する形のものが得られた．

これは，エルブランの定理の決定性問題への応用に都合のよいものとなっている．

[62]特に，214–219 ページ参照．

この応用の説明を機会に，原書 I，§4 ですでに触れ，そこで，より子細な議論を予告しておいた[63]論理式の充足可能性と反駁可能性の問題を，もう 1 度考えることにする．

そのために，ここでは，幾つかの場所で**決定性問題の集合論的扱い**を行うことになるが，その際，意識的に，有限の立場から離れることになる．

純粋な述語計算の論理式 $\mathfrak{F}$ が，集合論的述語論理[64] で，"充足可能" ということが，どういう意味であったかを復習しておこう．これは，ある対象領域 J で，$\mathfrak{F}$ の自由個体変数に対しては，その対象領域の元による置き換えが，パラメータを持たない論理式変数に対しては真偽値による置き換えが，パラメータを持つものに対しては，同じパラメータの数を持つ真偽値関数で，J の元に対して定義されているものが与えられて，これらに対し，論理式 $\mathfrak{F}$ が真偽値 "真" を得るということであった．ここでの，論理式の真偽値は，初等論理式の真偽値から出発して，命題論理の演算を真偽値関数と解釈して，量化詞を解釈することにより得られるものである．この際，量化詞の解釈は，論理式

$$(\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$$

が，上の置き換えに関して，真偽値 "真" を得るのは，対象領域の元 $\mathfrak{a}$ 全てに対し，$\mathfrak{A}(a)$ が真偽値 "真" を得るときとし，そうでない場合には，"偽" となるとして定義する．また，論理式

$$(E\,\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$$

が，上の置き換えに関して，真偽値 "真" を得るのは，少なくとも 1 つの対象領域の元 $\mathfrak{a}$ に対し，$\mathfrak{A}(a)$ が真偽値 "真" を得るときとし，そうでない場合には，"偽" となるとして定義する．

この意味で，論理式 $\mathfrak{F}$ に真偽値 "真" を与えるような置き換えの体系で，J が，その対象領域となっているようなものは，論理式 $\mathfrak{F}$ の領域 J における "充足" と呼ことにし，そこで置き換えに用いられた論理関数は，"充足を与える" 論理関数と呼ぶことにする．

---

[63]原書 I，128 ページ参照．

[64]原書 I，124 ページ以降参照．〔訳注: これは，現代の用語では "意味論" あるいは "モデル理論" というべきであろう．また，"充足 (Erfüllung)"，"充足可能 (erfüllbar)" の代わりに，それぞれ "モデル"，"モデルが存在する" という表現も用いられる．〕

充足可能な論理式が反駁可能でないことは，この集合論的立場では，全ての導出可能な述語計算の論理式は恒真である，つまり，自由変数を対象領域 J の元で置き換え，パラメータを持たない論理式変数を真偽値で置き換え，パラメータを持つ論理式変数は対象領域 J で定義された論理関数で置き換えるとき，論理記号の解釈により，常に真偽値 “真” が得られるという定理[65]からただちに導ける．

この定理から，2 つの同値な論理式は，両方とも充足可能であるか，両方とも充足可能でないかのどちらかであることが帰結できる．このことにより，任意の論理式の充足可能性の考察は，冠頭型論理式の充足可能性の考察に帰着できることがわかる．述語計算の任意の論理式は，ある冠頭型論理式と同値になるからである．

同様に，述語計算の論理式の充足可能性の考察において，パラメータを持たない論理式変数を除くことができることがわかる．なぜなら，述語計算の論理式 $\mathfrak{F}$ で，パラメータを持たない論理式変数 $\mathfrak{B}$ を持つものは，

$$(\mathfrak{F}_1 \,\&\, \mathfrak{B}) \vee (\mathfrak{F}_2 \,\&\, \overline{\mathfrak{B}})$$

という論理式で，パラメータを持たない論理式変数は $\mathfrak{F}$ に現れるもの以外は現れず，$\mathfrak{F}_1$，$\mathfrak{F}_2$ には，変数 $\mathfrak{B}$ は含まれないようなものに変形できる．この論理式の充足可能性は，$\mathfrak{F}$ が充足可能であるかどうかに従う．一方，この論理式は，$\mathfrak{B}$ をもはや含んでいない論理式

$$\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2$$

が充足可能であるちょうどそのときに充足可能となる．この，パラメータを持たない論理式変数の除去の手続きを，パラメータを持たない論理式変数を含まない論理式で，充足可能性に関しては，$\mathfrak{F}$ と同じに振る舞うようなものが得られるまで，繰り返し適用すればよい．

自由個体変数についても，論理式 $\mathfrak{F}$ で自由個体変数の現れるものは，充足可能性に関しては，その論理式の自由変数を束縛変数で置き換え，対応する**存在記号**を論理式の初めに付け加えて得られる任意の論理式と交換してかまわないという事実により，論理式の充足可能性の考察から除去することができる．

---

[65] 原書 I，127 ページ参照．

さらに，もう1つの帰着は，スコーレムにより発見された標準型をつくることである．これは，我々が“スコーレム標準型”と呼んだものと双対の関係にあるものである．我々が以前に見たものは証明論的スコーレムと呼ぶことができるが，これに対し，今度のものは，“意味論的”スコーレム標準型[66]と呼ぶことにする[67]．これは，冠頭型論理式で，そこに現れる全称記号が全て存在記号より前にあるようなものである．

与えられた冠頭型論理式から，このような標準型を得るための手法と，それが，もとの論理式と，充足可能性に関して同じ振る舞いをすることの証拠は，冠頭型論理式から，それと演繹的に同値なスコーレム標準型を得るための演繹の手順と，その演繹的同値性の証拠に，双対的に同様なものとなる．むしろ，充足可能性の場合には，集合論的な立場を前提にしている分だけ扱いが若干やさしくなる．

これに関する考察を，特徴的なケースでみるために，

$$(x)(E\,u_1)(E\,u_2)(y_1)(y_2)(y_3)(E\,v)(z_1)(z_2)\mathfrak{A}(x, u_1, u_2, y_1, y_2, y_3, v, z_1, z_2)$$

という形の論理式 $\mathfrak{F}$ を考察することにする．簡単のために（といっても，これは本質的なことではないが），この論理式には，自由個体変数もパラメータを持たない論理式変数も現れないものとする．

この論理式 $\mathfrak{F}$ が領域 J で充足可能とする．充足を与える論理関数に対して，適当な記号を導入する（例えば，添数付きの関数記号 Φ_1，Φ_2，...）．また，$\mathfrak{A}(x, u_1, u_2, y_1, y_2, y_3, v, z_1, z_2)$ の論理式変数を対応する論理関数の記号で置き換えて得られる表現を，$\tilde{\mathfrak{A}}(x, u_1, u_2, y_1, y_2, y_3, v, z_1, z_2)$ で表すことにする．

$\Phi(a, b, c, k, l, m, n)$ で，J の元の組のパラメータに対し，

$$(z_1)(z_2)\tilde{\mathfrak{A}}(a, b, c, k, l, m, n, z_1, z_2)$$

と同じ真偽値を与える論理関数を表し，$\Psi(a, b, c)$ で，J の元の組のパラメータに対し，

$$(y_1)(y_2)(y_3)(E\,v)(z_1)(z_2)\tilde{\mathfrak{A}}(a, b, c, y_1, y_2, y_3, v, z_1, z_2)$$

[66]原書 I，158 ページ参照．

[67]誤解が生じないことが明らかな場合には“意味論的”という言葉を略すことにする．

と同じ真偽値を与える論理関数を表すことにすると，次の 3 つの論理式

$$(x)(u_1)(u_2)(y_1)(y_2)(y_3)(v)(\Phi(x,u_1,u_2,y_1,y_2,y_3,v) \\ \rightarrow (z_1)(z_2)\tilde{\mathfrak{A}}(x,u_1,u_2,y_1,y_2,y_3,v,z_1,z_2)),$$

$$(x)(u_1)(u_2)(\Psi(x,u_1,u_2) \rightarrow (y_1)(y_2)(y_3)(E\,v)\Phi(x,u_1,u_2,y_1,y_2,y_3,v)),$$

$$(x)(E\,u_1)(E\,u_2)\Psi(x,u_1,u_2)$$

は，個体領域 J に関し（論理記号の解釈により）真偽値 “真” を得る．したがって，論理式変数 $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ を $\mathfrak{F}$ に現れないものとするとき，論理式

$$(1)\begin{cases} (x)(u_1)(u_2)(y_1)(y_2)(y_3)(v)(\mathfrak{U}(x,u_1,u_2,y_1,y_2,y_3,v) \rightarrow \\ (z_1)(z_2)\mathfrak{A}(x,u_1,u_2,y_1,y_2,y_3,v,z_1,z_2))\ \&\ (x)(u_1)(u_2)(\mathfrak{B}(x,u_1,u_2) \rightarrow \\ (y_1)(y_2)(y_3)(E\,v)\mathfrak{U}(x,u_1,u_2,y_1,y_2,y_3,v))\ \&\ (x)(Eu_1)(Eu_2)\mathfrak{B}(x,u_1,u_2) \end{cases}$$

も，領域 J で充足可能となる．他方，この論理式が充足可能なら，これの充足を与える論理関数の系の全てにおいて，2 番目と 3 番目の合接節により，

$$(x)(E\,u_1)(E\,u_2)(y_1)(y_2)(y_3)(E\,v)\mathfrak{U}(x,u_1,u_2,y_1,y_2,y_3,v)$$

という表現は，真偽値 “真” を得る．

したがって，論理式 $\mathfrak{F}$ の充足は，論理式 (1) 充足を同じ個体領域で与え，逆も成り立つ．

ところが，論理式 (1) は，容易に，しかも幾つかの異なった形の意味論的スコーレム標準型に変形できる．例えば，論理式

$$(2)\begin{cases} (x)(u_1)(u_2)(y_1)(y_2)(y_3)(v)(z_1)(z_2)(E\,w_1)(E\,w_2)(E\,w_3) \\ \qquad \{(\mathfrak{U}(x,u_1,u_2,y_1,y_2,y_3,v) \rightarrow \mathfrak{A}(x,u_1,u_2,y_1,y_2,y_3,v,z_1,z_2)) \\ \qquad\quad \&\ (\mathfrak{B}(x,u_1,u_2) \rightarrow \mathfrak{U}(x,u_1,u_2,y_1,y_2,y_3,w_1))\ \&\ \mathfrak{B}(x,w_2,w_3)\} \end{cases}$$

がそうである．これにより，論理式 $\mathfrak{F}$ から，充足可能性に関しては，それと同値なスコーレム標準型への移行ができたことになる．

ここで考察した場合で，例示した述語計算の任意の論理式 $\mathfrak{F}$ の充足可能性に関するスコーレム標準型 $\mathfrak{N}$ との同値性は，論理式 $\mathfrak{F}$ の 任意の個体領域 J での充足に対し，$\mathfrak{N}$ の充足が**同じ**個体領域で得られるという強い意味でのものと

なっている．このような2つの論理式の同値性を，“充足同値性”と呼ぶことにする[68]．

また，意味論的なスコーレム標準型と証明論的スコーレム標準型の間には，次のような双対的な関係が成り立っている．論理式 (2) の否定をとり，標準型を得るにあたって導入された論理式変数 $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ を，それらの否定で置き換えて——これにより演繹的に同値な論理式に移行することになる——得られる論理式は，論理式 $\overline{\mathfrak{F}}$ の証明論的スコーレム標準型に変形することができる．このことから，特に，前に考察した証明論的スコーレム標準型に関する定理により，論理式 (2) の否定は，$\mathfrak{F}$ の否定と演繹的に同値となっていることがわかる．一般的にも，同様にして，述語計算の論理式 $\mathfrak{F}$ の意味論的スコーレム標準型 $\mathfrak{N}$ の否定は論理式 $\mathfrak{F}$ の否定と演繹的に同値であることが示せる．したがって，このような，$\mathfrak{F}$ の標準型 $\mathfrak{N}$ は，論理式 $\mathfrak{F}$ と充足同値であるのみでなく，**反駁可能性**に関してもこの論理式と同じ振る舞いをすることになる．

b) レーベンハイムの定理とゲーデルの完全性定理． 意味論的スコーレム標準型は，特に，**任意の充足可能な論理式は，数の領域で充足可能である**という定理のやさしい証明を得るために応用できる——スコーレム自身も，この応用のために，この標準型を用いたのであった[69]．この定理は，前にも述べたように，最初はレーベンハイムによって発見され，かつ証明されたものであるが，述語計算の任意の論理式は，あるスコーレム標準型論理式と充足同値であるから，そのような標準型に対してのみ証明すれば十分である．さらに，その際に，前に注意したことにより，パラメータを持たない論理式変数も，自由個体変数も持たないような論理式に，制限して考えれば十分である．また，論理式の初めに現れる量化詞のうちには，少なくとも1つの全称記号および存在記号が現れると仮定してよい．全称記号がまったく現れないか，または，存在記号がまったく現れないような，述語計算の冠頭型論理式について，主張が成り立つことは，そのような論理式が充足可能なら，その充足は有限の個体領域ですでに可

[68] HEINRICH SCHOLZ の学派の用語では，このような関係にある2つの論理式は“充足性に関し結び付けられている”（erfüllbarkeisverbunden）と呼ばれている．

[69] TH. SKOLEM: “Logisch-Kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theorem über dichte Mengen”, *Vid.-Selsk. Skr. Kristiania, I. Mathem.-nat. Kl.* (1920) Nr.4.

能であるという事実からただちに導けるからである[70].

そこで,

$$(\mathfrak{x}_1)\dots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(E\,\mathfrak{y}_1)\dots(E\,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\mathfrak{B}(\mathfrak{x},\dots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\mathfrak{y}_1,\dots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

という形の論理式 $\mathfrak{F}$ で, $\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}$, $\mathfrak{y}_1,\dots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s}$ 以外の個体変数は現れず, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ は, ともに 0 と異なり, パラメータを持たない論理式変数は含まれないようなものを考察しよう. この論理式は, 個体領域 J で充足可能であるとする. ここで示したいのは, このとき, この論理式が数の領域でも充足可能であるということである.

仮定により, この論理式 $\mathfrak{F}$ に対し, 領域 J 上の充足を与える論理関数の体系が存在する. $\tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$ を, $\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$ で, おのおのの論理式変数を, それらに相当する充足を与える論理関数で与えられた記号で置き換えることにより得られる表現とする. このとき,

$$(\mathfrak{x}_1)\dots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(E\,\mathfrak{y}_1)\dots(E\,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{x},\dots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\mathfrak{y}_1,\dots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

は, 個体領域 J で, 真の論理式となる.

したがって, **選択原理**により, 領域 J 上の数学的 $\mathfrak{r}$ 変数関数 $\chi_1,\dots,\chi_\mathfrak{s}$ で,

$$(\mathfrak{x}_1)\dots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})\tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{x},\dots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\chi_1(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}),\dots,\chi_\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}))$$

が, 領域 J で真となる. つまり, $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_\mathfrak{r}$ が J の元を表す記号, あるいは, 表現とすれば, 論理式

$$\tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_\mathfrak{r},\chi_1(\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_\mathfrak{r}),\dots,\chi_\mathfrak{s}(\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_\mathfrak{r}))$$

が真となるということである.

ここで, J から 1 つのもとを選んで, これに対し "α" という記号を与え, 記号 α, $\chi_1,\dots,\chi_\mathfrak{s}$ から生成される項を枚挙する. 例えば, まず, これらの項を, 記号 $\chi_1,\dots,\chi_\mathfrak{s}$ に関する "重複度", つまり現れる関数記号の数によって並べ, 同じ重複度のものは辞書式に順序を決めていけばよい.

この枚挙により, おのおのの数 n は, 1 対 1 に (さらに, 上射的に) 記号 α, $\chi_1,\dots,\chi_\mathfrak{s}$ から生成される項で, n がその枚挙における番号となっているようなものに対応づけられる. この項は, これらの記号の持っていた意味により, J

---

[70] 原書 I, 190–192 ページの演習参照. これは, 証明論的な議論であるが, ただちに意味論的な議論にも適用できる.

の元を表している．したがって，J の元 $\xi(n)$ の数との一意的な対応で，$\xi(n)$ は，我々の枚挙により，記号 α，$\chi_1,\dots,\chi_{\mathfrak{s}}$ から生成される項のうち，n 番目のものの表す J の元となっているようなものが得られたことになる．

任意の数 $n_1,\dots,n_{\mathfrak{r}}$ に対し，$\mathfrak{i}$ が $1,\dots,\mathfrak{s}$ の中の番号であるとき，$\chi_{\mathfrak{i}}(\xi(n_1),\dots,\xi(n_{\mathfrak{r}}))$ は J の元で，これは，再び，記号 α，$\chi_1,\dots,\chi_{\mathfrak{s}}$ から生成された表現となる．我々の枚挙におけるこの表現の番号を，$n_1,\dots,n_{\mathfrak{r}}$ と添数 $\mathfrak{i}$ に対応させて "$\psi_{\mathfrak{i}}(n_1,\dots,n_{\mathfrak{r}})$" と書くことにする．このとき，

$$\psi_1(n_1,\dots,n_{\mathfrak{r}}),\dots,\psi_{\mathfrak{s}}(n_1,\dots,n_{\mathfrak{r}})$$

は，算術的関数となり，$\mathfrak{i}=1,\dots,\mathfrak{s}$ に対し，$\xi(\psi_{\mathfrak{i}}(n_1,\dots,n_{\mathfrak{r}}))$ の値は $\chi_{\mathfrak{i}}(\xi(n_1),\dots,\xi(n_{\mathfrak{r}}))$ と一致する．

ここで，表現 $\tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})$ に現れる，J 上の論理関数 $\mathfrak{P}(a_1,\dots,a_{\mathfrak{p}})$ を，それに対応する，数のパラメータ $n_1,\dots,n_{\mathfrak{p}}$ を持つ論理関数 $\mathfrak{P}(\xi(n_1),\dots,\xi(n_{\mathfrak{s}}))$ に，対応させる．$\mathfrak{B}^*(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})$ を，$\tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})$ に現れる J 上の論理関数を表す記号を，それに対応する，数の領域上の論理関数を表す記号で置き換えることによって得られる表現とすると，この対応の定義と，表現 $\xi(\psi_{\mathfrak{i}}(n_1,\dots,n_{\mathfrak{r}}))$ の値が $\chi_{\mathfrak{i}}(\xi(n_1),\dots,\xi(n_{\mathfrak{s}}))$ の値と一致することから，表現

$$\mathfrak{B}^*(n_1,\dots,n_{\mathfrak{r}},\psi_1(n_1,\dots,n_{\mathfrak{r}}),\dots,\psi_{\mathfrak{s}}(n_1,\dots,n_{\mathfrak{r}}))$$

は，任意の数 $n_1,\dots,n_{\mathfrak{r}}$ に対し，表現

$$\tilde{\mathfrak{B}}(\xi(n_1),\dots,\xi(n_{\mathfrak{r}}),\chi_1(\xi(n_1),\dots,\xi(n_{\mathfrak{r}})),\dots,\chi_{\mathfrak{s}}(\xi(n_1),\dots,\xi(n_{\mathfrak{r}})))$$

と同値になる．したがって，任意の数 $n_1,\dots,n_{\mathfrak{r}}$ に対し，この表現は，真偽値 "真" を得る．よって，論理式

$$(\mathfrak{x}_1)\dots(\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}})\mathfrak{B}^*(n_1,\dots,n_{\mathfrak{r}},\psi_1(n_1,\dots,n_{\mathfrak{r}}),\dots,\psi_{\mathfrak{s}}(n_1,\dots,n_{\mathfrak{r}}))$$

は数の領域で真となり，したがって，論理式

$$(\mathfrak{x}_1)\dots(\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}})(E\,\mathfrak{y}_1)\dots(E\,\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})\mathfrak{B}^*(\mathfrak{x},\dots,\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}},\mathfrak{y}_1,\dots,\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})$$

も数の領域で真となる．これにより，論理式 $\mathfrak{F}$ は数の領域でも充足可能なことが示せたことになる．

以上によって証明された，レーベンハイムの定理により，述語計算の論理式の充足可能性の概念は，数学的に，より扱いやすい数の領域での充足可能性の概念によって置き換えることができるようになる．

集合論的決定性問題での，さらなる簡易化は，**ゲーデルの完全性定理**[71] で，全ての反駁不可能な論理式は充足可能であるというのが，その内容である．

この定理の証明では，再び，

$$(3) \qquad (\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(E\,\mathfrak{y}_1)\ldots(E\,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\mathfrak{B}(\mathfrak{x},\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

という形の論理式で，$\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}$，$\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s}$ 以外の個体変数は現れないようなものに制限して考えてよい．なぜなら，$\mathfrak{C}$ を任意の述語計算の論理式として，$\mathfrak{N}$ を $\mathfrak{C}$ の意味論的スコーレム標準型とすると，$\mathfrak{N}$ は，上のような形をしているが，さらに，すでにみたように，$\mathfrak{N}$ は反駁可能性に関して $\mathfrak{C}$ と同じに振る舞う．したがって，もし，$\mathfrak{C}$ が反駁不可能なら，$\mathfrak{N}$ も反駁不可能である．逆に，$\mathfrak{N}$ が充足可能なら，$\mathfrak{C}$ も充足可能となる．よって，$\mathfrak{N}$ に対し，反駁不可能性から充足可能性を帰結することができれば，$\mathfrak{C}$ に対し，同じ帰結が得られることになる．

さらに，考察すべき論理式 (3) は，少なくとも 1 つの存在記号および全称記号を含んでいると再び仮定してよい．これを示すには，先の考察で $\mathfrak{s}=0$，あるいは $\mathfrak{r}=0$ の場合を直接に示したときのような回り道をする必要はなく，論理式

$$(\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r})$$

は，論理式

$$(\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(E\,\mathfrak{y})\{\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r})\,\&\,(A(\mathfrak{y})\vee\overline{A(\mathfrak{y})})\}$$

---

[71] K. Gödel: “Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls”, *Mh. Math. Phys.* Bd.37 (1930) Heft 2. ここでゲーデルが示しているように，完全性定理は，「全ての可算個の論理式の列は，それから矛盾が生じないなら，充足可能である」というより強い形で成り立つ．ゲーデルは，この強められた形のものを得るために，論理式の可算列が充足可能なのは，その全ての有限部分列が充足可能なときに限るという命題を証明している．この拡張された形の完全性定理の大変見通しのよい証明はヘンキン（L. Henkin）により与えられている（“The Completeness of the First Order Functional Calculus”, *Journ. of Symb. Logic* 14: 159–166, 1949）が，これはさらに，ハーゼンイェーガー（G. Hasenjaeger）により簡略化されている（“Eine Bemerkung zu Henkins Beweis für die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls erster Stufe”, *Journ. of Symb. Logic* 18: 42–48, 1953）．以来，完全性定理の証明は，さまざまな手法により得られている．

と同値になり，同様に，論理式

$$(E\,\mathfrak{y}_1)\ldots(E\,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\mathfrak{B}(\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

は，論理式

$$(\mathfrak{x})(E\,\mathfrak{y}_1)\ldots(\mathfrak{y}_\mathfrak{s})((A(\mathfrak{x})\vee\overline{A(\mathfrak{x})})\,\&\,\mathfrak{B}(\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s}))$$

と同値になるという事実と，このような論理式の変形を行っても，充足可能性に関しては，変化が起きないことを利用すればよい．$\mathfrak{F}$ を，(3) の形をした論理式で，$\mathfrak{r}$ と $\mathfrak{s}$ は 0 と異なり，$\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}$，$\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s}$ 以外の個体変数は現れないようなものとする．この論理式に，我々の反駁不可能性の判定条件 3* を適用する[72]．より詳しくいえば，前に定義した数表記の $\mathfrak{r}$-組の枚挙により，等式

$$\varphi_\mathrm{i}(\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}},\ldots,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}})=\mathfrak{s}\cdot\mathrm{j}+\mathrm{i}\qquad(\mathrm{i}=1,\ldots,\mathfrak{s},\mathrm{j}=0,1,\ldots)$$

で定義される関数の系[73] $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ に関しての 3* の応用であるが，これらの関数は，すでに述べたように[74]，離散的関数系を形成する．

これにより，全ての数 $\mathfrak{p}$ に対し，論理式

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}},\ldots,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}},\mathfrak{s}\cdot\mathrm{j}+1,\ldots,\mathfrak{s}\cdot\mathrm{j}+\mathfrak{s}),$$

$$\mathrm{j}=0,\ldots,(\mathfrak{p}+1)^\mathfrak{r}+1$$

が，同時に充足されることが帰結される．

これは，次のようにして示すこともできる．ある数 $\mathfrak{p}$ に対し，上の論理式の列が同時に充足されないとすれば，この数 $\mathfrak{p}$ に対し，これらの論理式に現れる互いに異なる初等論理式に，どのように真偽値を割り当てても，上の論理式の少なくとも 1 つは真偽値 “偽” を得ることになる．よって，これらの論理式の否定の離接は命題論理で真になる．つまり，命題計算の恒真な論理式から代入によって得られるものとなっている．ところが，この離接論理式からは，第 2 ε-定理の証明で，述語計算の導出可能な規則 (μ)，(ν) [75] の繰り返しの適用によ

[72] 245 ページ参照．ここで，この判定条件の使用を避けたければ，より直接的な考察を行うことになる．

[73] 238 ページ参照．

[74] 238 ページ参照．

[75] 194–195 ページ参照．

り行ったような手法を用いて，論理式

$$(E\mathfrak{x}_1)\dots(E\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(\mathfrak{y}_1)\dots(\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\mathfrak{y}_1,\dots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})}$$

が得られる．したがって，論理式 $\mathfrak{F}$ の否定が導出可能となってしまうが，これは我々の仮定に矛盾する．

こうして得られた結果は，次のような形で述べることができる．

論理式

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,\mathfrak{j}},\dots,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}},\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{j}+1,\dots,\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{j}+\mathfrak{s})$$

を “$\mathfrak{B}_\mathfrak{j}$” と略すことにすると，全ての数 $\mathfrak{k}$ に対し，合接論理式

$$\mathfrak{B}_0\ \&\ \mathfrak{B}_1\ \&\ \dots\ \&\ \mathfrak{B}_\mathfrak{k}$$

は充足可能となる．この（論理式 $\mathfrak{F}$ と，数 $\mathfrak{k}$ により決まる）合接論理式を，“$\mathfrak{F}_\mathfrak{k}$” で表すことにする．

ここで，論理式 $\mathfrak{F}_0$，$\mathfrak{F}_1$，$\mathfrak{F}_2$，... は，それぞれが，その次にくる論理式の部分合接論理式になっているわけだが，これらのおのおのの充足から，これらの論理式の全ての共通の充足が得られれば，$\mathfrak{F}$ の充足が得られる．

このために，論理式 $\mathfrak{B}_\mathfrak{j}$ $(\mathfrak{j}=0,\ 1,\ \dots)$ の構造を調べてみよう[76]．これらは，初等論理式から，命題計算の演算により組み立てられている．$\mathfrak{P}_1,\dots,\mathfrak{P}_{\mathfrak{r}_0}$ を $\mathfrak{B}_0$ に現れる初等論理式で，これらは，最初に現れる場所の順番で並べられているものとして，$\mathfrak{P}_{\mathfrak{r}_0+1},\dots,\mathfrak{P}_{\mathfrak{r}_1}$ を，$\mathfrak{B}_1$ に現れるが，$\mathfrak{B}_0$ には，まだ現れていないような初等論理式を最初に現れる場所の順番で並べたものとする，等々．一般には，$\mathfrak{P}_{\mathfrak{r}_\mathfrak{j}+1},\dots,\mathfrak{P}_{\mathfrak{r}_{\mathfrak{j}+1}}$ は，$\mathfrak{B}_{\mathfrak{j}+1}$ に新しく現れる初等論理式を，その最初に現れる場所の順番で並べたものとする．ここで，合接論理式 $\mathfrak{F}_\mathfrak{k}$ の充足は，初等論理式

$$\mathfrak{P}_1,\mathfrak{P}_2,\dots,\mathfrak{P}_{\mathfrak{r}_\mathfrak{k}}$$

への真偽値の配分に対応する．一般に，これらの初等論理式には $2^{\mathfrak{r}_\mathfrak{k}}$ 個の，異なる真偽値の配分が可能であるが，このような真偽値の配分は，“真”，“偽” の

[76] 訳注: ここでの議論は,「有限分岐的な無限木は無限な枝を持つ」というケーニッヒ（König）の補題の証明の特殊な場合となっている．

値をそれぞれ，数表記 0，1 で表し，$\mathfrak{m}_1,\ldots,\mathfrak{m}_{\mathfrak{r}_\mathfrak{k}}$ を，初等論理式 $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_{\mathfrak{r}_\mathfrak{k}}$ に与えられた値のこの順序での列記とすれば，全体の真偽値の配分は，数

$$2^{\mathfrak{r}_\mathfrak{k}-1}\cdot\mathfrak{m}_1+2^{\mathfrak{r}_\mathfrak{k}-2}\cdot\mathfrak{m}_2+\cdots+2\cdot\mathfrak{m}_{\mathfrak{r}_{\mathfrak{k}-1}}+\mathfrak{m}_{\mathfrak{r}_\mathfrak{k}}$$

により表現することができが，これは，2 進数表現において，ちょうど数表記 $\mathfrak{m}_1,\ldots,\mathfrak{m}_{\mathfrak{r}_\mathfrak{k}}$ をつなげたもので表示される数となっている．このようにして，$2^{\mathfrak{r}_\mathfrak{k}}$ 個の，異なる真偽値の初等論理式 $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_{\mathfrak{r}_\mathfrak{k}}$ への配分が，ある順序で 0 から $2^{\mathfrak{r}_\mathfrak{k}}-1$ までの数に対応づけられる．$\mathfrak{l}>\mathfrak{k}$ なら，全ての初等論理式 $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_{\mathfrak{r}_\mathfrak{l}}$ への真偽値の配分は，初等論理式 $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_{\mathfrak{r}_\mathfrak{k}}$ への真偽値の配分を含んでいる．$\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_{\mathfrak{r}_\mathfrak{l}}$ への，異なる真偽値の配分が，同一の $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_{\mathfrak{r}_\mathfrak{k}}$ への真偽値の配分を含んでいることはありうる．しかし，いずれの場合にも，我々の真偽値の配分の数による表現のやり方により，$\mathfrak{s}$ と $\mathfrak{t}$ が，$\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_{\mathfrak{r}_\mathfrak{l}}$ への真偽値の配分を表現する数で，$\mathfrak{s}^*$ と $\mathfrak{t}^*$ が，それぞれ，これらの配分に含まれる $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_{\mathfrak{r}_\mathfrak{k}}$ への真偽値の配分を表現するものなら，$\mathfrak{s}^*<\mathfrak{t}^*$ のときには，$\mathfrak{s}<\mathfrak{t}$ となることがわかる．

初等論理式 $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_{\mathfrak{r}_\mathfrak{k}}$ への真偽値の配分で，論理式 $\mathfrak{F}_\mathfrak{k}$ の真偽値 “真” にするようなものを “$\mathfrak{F}_\mathfrak{k}$ の充足を与える配分” と呼ぶことにする．

全ての数 $\mathfrak{k}$ に対し，少なくとも 1 つの，しかし，たかだか有限個の（つまり，たかだか $2^{\mathfrak{r}_\mathfrak{k}}$ 個の）互いに異なる，$\mathfrak{F}_\mathfrak{k}$ の充足を与える配分が存在する．$\mathfrak{l}>\mathfrak{k}$ なら，$\mathfrak{F}_\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{F}_\mathfrak{l}$ の部分合接論理式となるから，全ての $\mathfrak{F}_\mathfrak{l}$ の充足を与える配分は，$\mathfrak{F}_\mathfrak{k}$ の充足を与える配分を含んでいる．このような，$\mathfrak{F}_\mathfrak{k}$ の充足を与える配分を，その $\mathfrak{F}_\mathfrak{l}$ の充足を与える配分の “$\mathfrak{k}$-要素” と呼ぶことにする．$\mathfrak{F}_\mathfrak{k}$ の充足を与える配分が，ある $\mathfrak{F}_\mathfrak{q}$ の充足を与える配分の $\mathfrak{k}$-要素のとき，$\mathfrak{l}$ を $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{q}$ の間の任意の数として，その $\mathfrak{F}_\mathfrak{q}$ の充足を与える配分の $\mathfrak{l}$-要素の $\mathfrak{k}$-要素は，もとの $\mathfrak{F}_\mathfrak{k}$ の充足を与える配分となる．したがって，$\mathfrak{F}_\mathfrak{k}$ の充足を与える配分のうち，少なくとも 1 つは，$\mathfrak{k}$ より大きい，全ての数 $\mathfrak{l}$ に対し，$\mathfrak{F}_\mathfrak{l}$ の充足を与えるある配分の $\mathfrak{k}$-要素となっている．さらに，そのような性質を持つ $\mathfrak{F}_\mathfrak{k}$ の充足を与える配分のうち，それを表現する数が最小となるものを一意に決めることができる．このようにして，おのおのの数 $\mathfrak{k}$ に対し，1 つの “選ばれた” 真偽値の初等論理式 $\mathfrak{P}_1$，$,\ldots,\mathfrak{P}_{\mathfrak{r}_\mathfrak{k}}$ への配分が，$\mathfrak{F}_\mathfrak{k}$ の充足を与える配分のうち，全ての数 $\mathfrak{l}>\mathfrak{k}$ に対し，$\mathfrak{F}_\mathfrak{l}$ の充足を与えるある配分の $\mathfrak{k}$-要素となり，かつ，そのようなもののうち，その数による表現が最小になるようなものとして決まる．

この数 $\mathfrak{k}$ に対し選ばれた真偽値の配分の定義により，任意の2数 $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$ で，$\mathfrak{k}$ が，これらのうちの小さいほうであるものに対し，$\mathfrak{k}$ に対し選ばれた配分は，$\mathfrak{l}$ に対し選ばれた配分の $\mathfrak{k}$-要素となる．なぜなら，$n_{\mathfrak{k}}$, $n_{\mathfrak{l}}$ を，それぞれ数 $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$ に対する選ばれた配分を表現する数として，m を $n_{\mathfrak{l}}$ で表現された配分の $\mathfrak{k}$-要素を表現する数とすれば，まず $n_{\mathfrak{k}}$ の定義により，m は $n_{\mathfrak{k}}$ より小さくない．もし，m が $n_{\mathfrak{k}}$ より真に大きかったとすれば，$n_{\mathfrak{k}}$ が定義により持つ性質により，$\mathfrak{F}_{\mathfrak{l}}$ の充足を与える配分で，$n_{\mathfrak{k}}$ で表現される配分を $\mathfrak{k}$-要素として持ち，全ての数 $\mathfrak{q} > \mathfrak{l}$ に対し，$\mathfrak{F}_{\mathfrak{q}}$ のある充足を与える配分の $\mathfrak{l}$-要素となっているようなものが存在する．$n_{\mathfrak{k}} < m$ であるから，上で述べた真偽値の配分の数による表現の持つ性質により，この配分は，$n_{\mathfrak{l}}$ より小さな数で表現されている．これは，しかし，$n_{\mathfrak{k}}$ の定義に矛盾する．したがって，m は $n_{\mathfrak{k}}$ と一致しなくてはならない．つまり，$n_{\mathfrak{k}}$ で表現される配分は，$n_{\mathfrak{l}}$ で表現される配分の $\mathfrak{k}$-要素となっている．

これにより，異なる数に対する選ばれた配分は，1つの初等論理式 $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ... への真偽値の配分として，組み合わせるとができることがわかる．

ここで，この組み合わされた真偽値の配分から，ただちに，論理式 $\mathfrak{F}$ の充足を得ることができる．なぜなら，初等論理式 $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ... は，数表記のパラメータを伴った論理式変数，および場合によっては，パラメータを含まない論理式変数からなるが，この際，$\mathfrak{F}$ に現れる全ての論理式変数が，ここに現れる．ここで，これらの論理式変数は，一般には，全ての可能なパラメータの組み合わせを伴って現れないが，$\mathfrak{F}_{\mathfrak{k}}$ に現れるようなもの全てを伴って現れている．したがって，初等論理式 $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ... への真偽値の配分により，まず，パラメータを持たない論理式変数が現れる場合には，それらの真偽値は確定され，さらに，パラメータを持つ論理式変数に置き換えられるべき数の領域上の論理関数のうち，$\mathfrak{F}_{\mathfrak{k}}$ の形の論理式に現れるようなパラメータの組み合わせの部分についても決定される．他のパラメータの組み合わせについては，これらの論理関数の値を任意にとる．例えば，そのようなところでは常に真偽値 “真” をとるようにする．これにより，

数の領域上の論理関数と，パラメータを持たない論理式変数を置き換える真偽値による，論理式

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}}, \mathfrak{s}\cdot\mathfrak{j}+1, \ldots, \mathfrak{s}\cdot\mathfrak{j}+\mathfrak{s})$$

の同時的な充足が得られた．ところが，$\mathfrak{r}$-組の列 $\mathfrak{n}_{1,\mathfrak{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}}$, $\mathfrak{j} = 0$, 1, ...

には，全ての可能な数表記の $\mathfrak{r}$-組が現れるから，これにより，論理式

$$(\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}})(E\,\mathfrak{y}_1)\ldots(E\,\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1,\ldots\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}},\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})$$

の数の領域における充足が得られたことになる．

この，ゲーデルの完全性定理の証明により，同時に充足可能な論理式は，数の領域で充足可能であるというレーベンハイムの定理の新しい証明が得られたことになる．なぜなら，ここでは，反駁不可能性から，充足可能性だけでなく，数の領域での充足可能性が帰結されているが，他方，ある論理式の充足可能性からは，その反駁不可能性が導かれるからである．

注意 1. このレーベンハイムの定理の 2 番目の証明[77] は，1 番目の証明では本質的に用られていた選択原理を用いずに行える．他方，新しいほうの証明は，(数 $\mathfrak{k}$ に対して選ばれた真偽値の配分を求めるところで) 自然数に関する非構成的証明法 (tertium non datur) [78] が用いられている．したがって，この新しい証明方法は，選択原理が使われていないにもかかわらず，有限的な証明とはいえない．

注意 2. 合接論理式 $\mathfrak{F}_0$，$\mathfrak{F}_1$，$\mathfrak{F}_2$，... の充足可能性から，論理式 $\mathfrak{B}_0$，$\mathfrak{B}_1$，$\mathfrak{B}_2$，... の同時的な充足を得て，それから，$\mathfrak{F}$ の充足可能性を帰結したときの考察では，論理式 $\mathfrak{B}_0$，$\mathfrak{B}_1$，$\mathfrak{B}_2$，... に現れる初等論理式 $\mathfrak{P}_1$，$\mathfrak{P}_2$，... の形態に関しては，何の議論もなされず，これらの初等論理式に割り振られる，真偽値のみが問題であった．したがって，この考察において，初等論理式を命題変数で置き換えることで，次のような純粋に命題論理のみに関する結果が得られる．論理式 $\mathfrak{C}_1$，$\mathfrak{C}_2$，... が命題変数 A_1，A_2，... から命題論理の記号により構成されていて，任意の数 $\mathfrak{k}$ に対し，論理式 $\mathfrak{C}_1$，$\mathfrak{C}_2$,...,$\mathfrak{C}_{\mathfrak{k}}$ が同時に充足可能なら，これらの論理式の全ては，同時に充足可能である[79]．これと同値な主

---

[77] この証明から，述語計算に対する言及を取り除き，完全に意味論的な証明を得ることができる．このような証明で，(3) の形をした論理式 $\mathfrak{F}$ の充足可能性により，おのおのの論理式 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{k}}$ の充足可能性が帰結できることを用いたものは，スコーレムの論文 “Über einige Grundlagenfragen der Mathemathik”, *Skr. norske Vid.-Akad., Oslo, I. Mathem.-nat. Kl.* (1929) Nr.4 で論じられている．これに関しては，原書 I，128 ページ，脚注 1 を参照．

[78] 原書 I，32–36 ページ参照．

[79] 訳注: この定理は，“命題論理に関するコンパクト性定理” と呼ばれている．

張として，上の論理式の列の任意の有限部分集合が充足可能なら，論理式 $\mathfrak{C}_1$，$\mathfrak{C}_2$，... の全ては，同時に充足可能である．

ここで行った考察は，前に

$$(x)(E\,y)(E\,z)(u)(E\,v)\mathfrak{A}(x,y,z,u,v)\,\&\,(E\,x)(E\,y)(z)\mathfrak{B}(x,y,z)$$

という形の論理式 $\mathfrak{F}$ に対して考察した反駁可能性の判定条件の一般的な場合[80]に対しても応用できる．ここで——考察の有限的な性格を犠牲にして——対偶をとり，すぐ前で述べた命題論理での考察を用いることで，次の結果が得られる．この論理式 $\mathfrak{F}$ が反駁不可能であるなら，任意の数表記 $\mathfrak{z}_1$，$\mathfrak{z}_2$ と，任意の計算可能な算術的関数の3つ組 φ_1，φ_2，φ_3（ここに，φ_1，φ_2 は1変数，φ_3 は2変数である）で離散的関数系を成すものに対し，論理式

$$(x)(u)\mathfrak{A}(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x),u,\varphi_3(x,u))\,\&\,(z)\mathfrak{B}(\mathfrak{z}_1,\mathfrak{z}_2,z)$$

は充足可能である．逆に，この論理式が，ある数表記 $\mathfrak{z}_1$，$\mathfrak{z}_2$ と，上のような計算可能な関数の3つ組 φ_1，φ_2，φ_3 に対して充足可能なら，論理式 $\mathfrak{F}$ は反駁不可能である．

これらの主張においては，完全性定理により両方の箇所で，“反駁不可能”の代わりに，“充足可能”ということができる．

これらの考察は，いずれにしても，有限的な考察の領域の外でのものになっている．

c) 有限の立場の要請への考慮．　ゲーデルの完全性定理により，決定性問題で取り扱わなくてはならない課題は，次の意味で大いに簡単になった．つまり，ある述語計算の論理式の充足可能性の主張は，その反駁不可能性（つまり，その論理式の否定の導出不可能性）の主張と同値で，ある論理式の恒真性の主張は，その論理式の導出可能性の主張と同値になるということが示せたことにより，もともとは別の概念であった述語計算の論理式の導出可能性（あるいは反駁可能性）と，充足可能性の同等性が認められた．さらに，充足可能性と数の領域での充足性が同等になることも示された．

しかし，これらの見通しのよい結果においては，集合論的述語論理での概念が用いられているので，決定性問題の有限的な扱いでは，これらの結果を，無

[80] 249–250 ページでの判定条件 1. と 3.

思慮に採用することはできない．これは，すでに，充足可能性の概念形成を行うことが，その定義の仕方から，有限の立場では不可能であるということからもわかる．

実際に，ある論理関数で，与えられたパラメータの系のとる真偽値は，その論理関数の定義に全称性や存在性の決定がかかわってくる可能性があるため，一般には，有限的に確定されるとは限らない．さらに，量化詞に関しては，すでにみたように，これは有限的に解釈することはできる[81]が，そのような解釈においては，全称命題あるいは存在命題に対し，それが真になることと偽になることの間での排中性が成り立たなくなってしまう．また，有限的な“充足”においては，任意の個体領域を用いることはできず，直截的に明らかな種類の要素を持つものに限られる．

ここで，充足可能性の概念を，1. 充足可能性を，最初から数表記の領域におけるものに限り，2. 論理関数の定義で，それらは，与えられたパラメータに対する真偽値の計算が可能であるようなものとし，3. 量化詞の有限的な解釈を採用することにより，有限の立場から，“構成的充足可能性”に強めることが考えられる．

このようにして，少なくとも述語計算の論理式で，そこで量化詞は否定されず，含意論理式の前節にも現れず，同値論理式の節にも現れないようなもの全てに対し，**構成的充足可能性の定義**が得られる．特に，冠頭型の論理式，および冠頭型の論理式の合接がそのようなものとなる．つまり，このような形をした論理式に対しては，“数表記の領域で構成的に充足可能”であることが，論理式に真偽値“真”を与えるような自由個体変数の数表記による置き換え，パラメータを持たない論理式の真偽値による置き換え，パラメータを持つ論理式については，これの数の領域上に計算可能な 方法で定義された論理関数での置き換えを与えることができることとして定義される．ここで，論理式に対する真偽値の付値は，初等論理式の真偽値から出発して，命題計算の演算を真偽値関数として解釈し，量化詞については，$(\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ が真偽値“真”を得るのは，任意に与えられた数表記 $\mathfrak{z}$ に対し，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ が真偽値“真”を得ることが示せるときとし，$(E\,\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ が真偽値“真”を得るのは，数表記 $\mathfrak{z}$ で，$\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ が真偽値“真”を得るようなものを具体的に与えることができるときとして解釈すること

[81] 原書 I，32 ページ参照.〔訳注: $(E\,\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ を，「$\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ となるような $\mathfrak{n}$ を得るための手続きが与えられている」というように解釈する.〕

で，得られるものとする．

この構成的充足可能性の概念は，それの適用できる論理式のタイプに限っても，反駁不可能性と同値になることが示せないという点で，普通の充足性の概念と比べて，満足のゆくようなものではない．ただし，我々の判定条件 2* により[82]，構成的に充足可能な論理式は，反駁不可能であることがわかる．

このことを，

$$(\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(E\,\mathfrak{y}_1)\ldots(E\,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s},\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_\mathfrak{q})$$

という形をした論理式で，$\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}$，$\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s}$ 以外の束縛変数は現れず，$\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_\mathfrak{q}$ 以外の自由変数は現れないようなものでみてみよう．簡単のために，この論理式は，パラメータを持たない論理式変数を含まないものとする．このような論理式が構成的に充足可能であるとは，変数 $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_\mathfrak{q}$ をある数表記 $\mathfrak{m}_1,\ldots,\mathfrak{m}_\mathfrak{q}$ で置き換え，論理式変数を，数表記の領域で定義された計算可能な論理関数で置き換えることにより，全ての数表記の $\mathfrak{r}$-組 $\mathfrak{n}_1,\ldots,\mathfrak{n}_\mathfrak{r}$ に対し，数表記の $\mathfrak{s}$-組 $\mathfrak{k}_1,\ldots,\mathfrak{k}_\mathfrak{s}$ を決定することができて，これにより，論理式

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_1,\ldots,\mathfrak{n}_\mathfrak{r},\mathfrak{k}_1,\ldots,\mathfrak{k}_\mathfrak{s},\mathfrak{m}_1,\ldots,\mathfrak{m}_\mathfrak{q})$$

が，初等論理式の真偽値と，命題計算の演算の真偽値関数としての解釈により，真偽値“真”を得るようなものが求まることを意味する．このような論理関数の体系により，添数付けされた，数表記の $\mathfrak{r}$-組

$$\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}},\ldots,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}},\qquad \mathrm{j}=0,1,\ldots$$

を，どれだけ先まで進めても，$\mathfrak{s}$-組 $\mathfrak{k}_{1,\mathrm{j}},\ldots,\mathfrak{k}_{\mathfrak{s},\mathrm{j}}$ を，論理式

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}},\ldots,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}},\mathfrak{k}_{1,\mathrm{j}},\ldots,\mathfrak{k}_{\mathfrak{s},\mathrm{j}},\mathfrak{m}_1,\ldots,\mathfrak{m}_\mathfrak{q})$$

が，進んだところまで，全て（反駁可能性や反駁不可能性の判定条件のところでのような初等的な意味で）同時に充足可能であるようにとれる．

判定条件 2* により，このことから，この考察している論理式は反駁不可能であることがわかる．同様にして，一般に，構成的に充足可能な，冠頭型論理式，あるいは，さらに構成的に充足可能な冠頭型論理式の合接は反駁不可能であることが示せる．

---

[82]245 ページ参照．

これに対し，全ての反駁不可能な冠頭型論理式が，構成的に充足可能であることを示すことはできない．このような，ゲーデルの完全性定理を強めて有限的にしたものの証明の足がかりがまったくみつからないというだけでなく，一般には，反駁不可能な冠頭型論理式に対し，**計算可能な**論理関数による充足は可能でないであろうと予想される．

しかし，これとは別のやり方で，集合論的な立場から確立された反駁不可能性と充足可能性の同値に対する，有限の立場での代用をみつけることができる．つまり，我々の反駁可能性，あるいは反駁不可能性の判定条件は，すでに，これに似た同値性を主張しているものだからである．

ゲーデルの完全性定理は，判定条件 3* を用いて導き出されたが[83]，これは，つまり，この判定条件にゲーデルの完全性定理の有限的な部分が記述されていることであると考えることができる．逆に，全ての構成的に充足可能な論理式は反駁不可能であるという定理は，判定条件 2* からの帰結であることを，上で確かめたばかりであるが，これは，ゲーデルの定理の逆であるところの充足可能な論理式の反駁不可能性を主張する定理の有限的な部分とみることができる．

これにより，充足可能性に関する考察で，その結果が，充足可能性と反駁不可能性が同じものとなることから，反駁不可能性に対する主張として，つまり証明論的な主張としても記述できるが，有限の立場から証明は与えられていないのようなものの多くは，我々の反駁可能性と反駁不可能性に対する判定条件により，直接的に有限的な証明論での考察に翻訳できるということの妥当性が理解できる．

d) 1つの例．　エルブランは，彼の基本定理 (théorème fondamental) を用いて，当時，すでに知られていた充足可能性の理論による証明の全てに対するこのような翻訳を与えてみせた[84]．それ以来，充足可能性の理論では，さまざまな注目に値する結果が得られている[85]．ここでは，それらの全ての研究結果の有限的な証明論への翻訳を行わないが，このような翻訳は全ての場合において可能なはずである．むしろ，ここでは，そのような翻訳の手法を，最近ペ

---

[83] 245 ページ参照．

[84] すでに引用したエルブランの論文 “Sur le problème fondamental de la logique mathématique” の II，III の各章を参照．

[85] これに続く，279–281 ページでのまとめを参照．

ピス (J. Pepis) によって証明された定理[86]を例にとって説明することにとどめる．この定理の主張は，述語計算の論理式 $\mathfrak{F}$ に対し，

$$(1)\qquad (x)(y)(E\,z)A(x,y,z)\,\&\,(\mathfrak{u}_1)\dots(\mathfrak{u}_\mathfrak{m})\mathfrak{C}(\mathfrak{u}_1,\dots,\mathfrak{u}_\mathfrak{m})$$

という形の論理式で，x，y，z，$\mathfrak{u}_1,\dots,\mathfrak{u}_\mathfrak{m}$ 以外の個体変数は現れないようなもので，充足可能性に関して，$\mathfrak{F}$ と同値になるようなものが存在するというものである．

これの証拠は，ペピスにより次のように行われている[87]: まず，考察すべき述語計算の論理式 $\mathfrak{F}$ は

$$(\mathfrak{x}_1)\dots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(E\,\mathfrak{y}_1)\dots(E\,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\mathfrak{y}_1,\dots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

という形で，$\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}$，$\mathfrak{y}_1,\dots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s}$ はここに現れる個体変数の全てで，$\mathfrak{r}$ と $\mathfrak{s}$ は 0 と異なり，この論理式の中にはパラメータを持たない論理式変数は現れないとしてよい[88]．すでにみたように，全ての論理式は，このような論理式に，充足同値となる．また，この論理式は，(パラメータを持った) 論理式変数 A を含まないようにとることができる．

この論理式 $\mathfrak{F}$ の個体領域 J での充足が与えられているとしよう[89]．また，充足を与える論理関数に対し，それらの記号が選ばれているとして，これらの記号で，対応する $\mathfrak{F}$ の論理式変数を置き換えて得られることにより，表現 $\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$ は

$$\tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

に移行するとする．考察の初めは，レーベンハイムの定理でと同様に行う．ま

[86] Józef Pepis: "Untersuchungen über das Entscheidungsproblem der mathematischen Logik", *Fund. Math.* Vol. 30 (1938). この論文は，ペピスのこれ以前の研究であるところの "Beiträge zur Reduktionstheorie des logischen Entscheidungsproblems", *Acta Sci. Math.* Vol. 8 (1936/37) の続きとなっている．

[87] ここで与えられた表現は不可避な変更を除くと，ペピスのもとのとまったく同一である．

[88] ペピスが，彼の論文 "Ein Verfahren der mathematischen Logik", *J. symb. logic* Vol. 3 (1938) で示したように，この準備段階における意味論的スコーレム標準型の適用は，避けることができる．これにより，この考察による結果を，さらに若干強いものにできる．

[89] ここで，ただちにレーベンハイムの定理を適用することができるが，この場合，これにより，何の簡略化も得られない．

ず，選択原理により，ある領域 J 上の $\mathfrak{r}$ 変数関数 $\chi_1,\ldots,\chi_\mathfrak{s}$ で，論理式

$$(\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})\tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\chi_1(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}),\ldots,\chi_\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}))$$

が，領域 J に関して真となる．再び，J のある元を選んで，これに対し“α”という記号を付ける．ここで，再び，記号 α，$\chi_1,\ldots,\chi_\mathfrak{s}$ から生成される表現の全体を考察する．しかし，これらを直接に枚挙することはしないで，次のような一般に成り立つ補助的な考察を行う: $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ を，離散的関数系を形成する $\mathfrak{r}$ 変数の算術的関数とする．$\mathfrak{Z}_0$ を，関数 $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ の値とならないような数（数表記）[90]の全体のつくる領域とする．このとき，任意の数は，関数記号 $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ と $\mathfrak{Z}_0$ の数から生成される項により，一意に表現される．

このことは，完全帰納法により示せる．数 0 については，このことは成り立つ．関数 $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ の値は，常にそのパラメータより大きいから，0 は $\mathfrak{Z}_0$ の元となるからである．この命題が n より小さい全ての数に対し成り立つとすると，この命題は n に対しても成り立つことを示す．n は $\mathfrak{Z}_0$ に属すか，そうでなければ，$\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ のうちのどれかの関数値となっている．ところが，これらの関数は，離散的関数系を形づくるから，そのような関数と，パラメータの値で，それにより，この関数の値が n になるようなものが一意に決まる．さらに，これらのパラメータの値は，全て n より小さいから，帰納法の仮定をこれらに適用することができる．したがって，n は，関数記号 $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ から生成された関数の表現で，一番内側のパラメータは $\mathfrak{Z}_0$ の数となっているようなもので表されることがわかる．

ここで，次のようにして，数から J の元への写像が得られる．数 n に対し，その関数記号 $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ と，$\mathfrak{Z}_0$ による表現での $\mathfrak{Z}_0$ の数を全て α で置き換え，関数記号 $\varphi_\mathfrak{i}$ $(\mathfrak{i}=1,\ldots,\mathfrak{s})$ を，対応する関数記号 $\chi_\mathfrak{i}$ で置き換えて得られる表現は J の元で，n に対し一意に決まるが，これを $\eta(n)$ と表すことにする．

このとき，任意の数 $n_1,\ldots,n_\mathfrak{r}$ と $\mathfrak{i}=1,\ldots,\mathfrak{s}$ に対し，$\eta(\varphi_\mathfrak{i}(n_1,\ldots,n_\mathfrak{r}))$ の値は，$\chi_\mathfrak{i}(\eta(n_1),\ldots,\eta(n_\mathfrak{r}))$ の値と等しくなる．さらに，$\tilde{B}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$ に現れる論理関数 $\mathfrak{P}(a_1,\ldots,a_\mathfrak{k})$ は，領域 J 上で定義されているわけであるが，これにより，数の領域上で定義された論理関数 $\mathfrak{P}(\eta(n_1),\ldots,\eta(n_\mathfrak{k}))$ が規定される．$\mathfrak{B}^*(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$ で，$\tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$ から，$\mathfrak{J}$ 上の論理関数を表す記号を，(上の

[90]数は，ここでは，数表記と考える．ここでの考察は有限的な性質に対する配慮はしていないことに注意．

ような方法で）それらに対応づけられた，数の領域上の論理関数を表す記号で置き換えることによって得られる表現とすれば，論理式

$$(\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})\mathfrak{B}^*(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\varphi_1(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}),\ldots,\varphi_\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}))$$

は，数の領域上で真の論理式となる．

この補助的な考察の結果は，次のようなレーベンハイムの定理の拡張として述べることができる．ここで考察したような形の論理式

$$(\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(E\,\mathfrak{y}_1)\ldots(E\,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

が，充足可能なら，数の領域上の任意の離散的関数系

$$\varphi_1(n_1,\ldots,n_\mathfrak{r}),\ldots,\varphi_\mathfrak{s}(n_1,\ldots,n_\mathfrak{r})$$

に対し，論理式

$$(\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\varphi_1(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}),\ldots,\varphi_\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}))$$

は，充足可能となる[91]．

つまり，任意の離散的関数系 $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mathfrak{s}$ に対し，数の領域上で真となる論理式

$$(\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})\mathfrak{B}^*(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\varphi_1(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}),\ldots,\varphi_\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}))$$

を得ることができる．

ここで，離散的関数系を，できるだけ簡単な構成法により得たい．そのようなものを，ただ1つの2変数関数の繰り返しにより得ることを考える．この2変数関数は，全ての2つの数に対し，不等式

$$\psi(a,b)>a,\qquad \psi(a,b)>b$$

という不等式を満たし，また，その値は，それぞれ，ただ1つの数の組の関数値として与えられているような，任意のものとして選べる．

例えば，$\psi(a,b)=2^a(2b+1)$ はそのようなものである．

---

[91] この補助定理での証明法は，アッカーマン（W. Ackermann）の，“Beiträge zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik”, *Math. Ann.* Bd.112 (1936) Heft 3から採られており，ペピスも，ここでの議論で，これを引用している．〔訳注: ここで考えている論理体系には，等号は含まれていない．〕

ここで，与えられた数 $\mathfrak{k}$ $(\neq 0)$ に対し，$\psi_\mathfrak{k}(a_1,\ldots,a_{\mathfrak{k}+1})$ を，(関数記号 ψ の $\mathfrak{k}$ 回現れる）表現

$$\psi(a,\psi(a_2,\psi(a_3,\ldots,\psi(a_\mathfrak{k},a_{\mathfrak{k}+1}))\ldots)$$

で与えられる $\mathfrak{k}+1$ 変数の関数とする．ただし，$\psi_0(a_1)$ は a_1 とする．このような関数は，帰納的に，等式

$$\psi_0(a_1)=a_1$$
$$\psi_{\mathfrak{k}+1}(a_1,\ldots,a_{\mathfrak{k}+2})=\psi(a_1,\psi_\mathfrak{k}(a_2,\ldots,a_{\mathfrak{k}+2}))$$

により定義することもできる．$\psi(a,b)$ の上に述べた性質により，$\psi_\mathfrak{k}(a_1,\ldots,a_{\mathfrak{k}+1})$ も同様の性質を持つことになる．つまり，$\mathfrak{k}\neq 0$ に対し，この関数の値は，常に，その，どのパラメータの値より大きくなり，また，この関数は，その，それぞれの値を，ただ1つのパラメータの組の関数値をして持つ．

さらに，$\mathfrak{k}\neq 0$ に対し，$\psi^{(\mathfrak{k})}$ を，$\psi_\mathfrak{k}(a_1,\ldots,a_{\mathfrak{k}+1})$ で，パラメータを全て同じにすることで得られる1変数関数とする．これは，また，帰納的に，等式

$$\psi^{(1)}(a)=\psi(a,a)$$
$$\psi^{(\mathfrak{k}+1)}(a)=\psi(a,\psi^{(\mathfrak{k})}(a))$$

によって定義される関数となっている．この関数は，すぐにわかるように，関係

$$\psi^{(\mathfrak{k})}(a)>a,\qquad \psi^{(\mathfrak{k}+1)}(a)>\psi^{(\mathfrak{k})}(a)$$

を満たしており，さらに，等式

$$\psi^{(\mathfrak{k})}(a)=\psi^{(\mathfrak{l})}(b)$$

が成り立つのは，$\mathfrak{k}=\mathfrak{l}$ および $a=b$ となるときに限るという条件を満たしている．

ここで，$\mathfrak{i}=1,\ldots,\mathfrak{s}$ に対し，

$$\kappa_\mathfrak{i}(n_1,\ldots,n_\mathfrak{r})=\psi^{(\mathfrak{i})}(\psi_{\mathfrak{r}-1}(n_\mathfrak{r},n_{\mathfrak{r}-1},\ldots,n_1))$$

と置くと，これらの関数は，関数 $\psi_\mathfrak{k}(a_1,\ldots,a_{\mathfrak{k}+1})$ と $\psi^{(\mathfrak{k})}(a)$ の上であげた性質により，離散的関数系となる．

したがって，論理式

(2)　$(\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})\mathfrak{B}^*(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\kappa_1(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}),\ldots,\kappa_\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}))$

は，数の領域で真となる．

今度は，数学的関数 $\kappa_1,\ldots,\kappa_\mathfrak{s}$ を論理関数で置き換えたい．関数 $\kappa_1,\ldots,\kappa_\mathfrak{s}$ は，全て，関数 $\psi(a,b)$ の繰り返しの適用により得られているから，このためには，数に関する 3 つのパラメータ a，b，c を持ったもので，

$$\psi(a,b)=c$$

が，正しいか正しくないかに従って真偽値 “真”，“偽” をとるようなものを導入すればよい．この論理関数に対し，(2) でまだ用いられていない記号，例えば，$\Psi(a,b,c)$ を与えることにする．

この記号を用いて関数記号 $\kappa_1,\ldots,\kappa_\mathfrak{s}$ の削除を実行するために，一時的に等号（と善良な等号の付値）を導入するが，これは，後の議論で再び除去される．まず，(2) から，真の論理式

$$(3)\quad \begin{cases} (\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(\mathfrak{y}_1)\ldots(\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\{\kappa_1(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r})=\mathfrak{y}_1\;\&\;\kappa_2(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r})=\mathfrak{y}_2 \\ \qquad\&\;\ldots\;\&\;\kappa_\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r})=\mathfrak{y}_\mathfrak{s}\;\to\;\mathfrak{B}^*(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\} \end{cases}$$

を得る．

$$\kappa_1(n_1,\ldots,n_\mathfrak{r})=l_1\;\&\;\kappa_2(n_1,\ldots,n_\mathfrak{r})=l_2\;\&\;\ldots\;\&\;\kappa_\mathfrak{s}(n_1,\ldots,n_\mathfrak{r})=l_\mathfrak{s}$$

という関係を，論理関数 $\Psi(a,b,c)$ により，以下のように表現することができる:

$$\begin{aligned}&(E\,\mathfrak{v}_1)\ldots(E\,\mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1})\{\Psi(n_2,n_1,\mathfrak{v}_1)\;\&\;\Psi(n_3,\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)\;\&\;\Psi(n_4,\mathfrak{v}_2,\mathfrak{v}_3)\\ &\qquad\&\;\ldots\;\&\;\Psi(n_\mathfrak{r},\mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-2},\mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1})\;\&\;\Psi(\mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1},\mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1},l_1)\\ &\qquad\&\;\Psi(\mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1},l_1,l_2)\;\&\;\ldots\;\&\;\Psi(\mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1},l_{\mathfrak{s}-1},l_\mathfrak{s})\}.\end{aligned}$$

($\mathfrak{r}=1$ の場合には，ここで，

$$\psi(n_1,n_1,l_1)\;\&\;\Psi(n_1,l_1,l_2)\;\&\;\ldots\;\&\;\psi(n_1,l_{\mathfrak{s}-1},l_\mathfrak{s})$$

が，用いられることになる．）この表現を論理式 (3) に記入して，

$$((E\,\mathfrak{v}_1)\ldots(E\,\mathfrak{v}_\mathfrak{r})\mathfrak{K}(\mathfrak{v}_1,\ldots,\mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1}))\to\mathfrak{L}$$

という形の表現で $\mathfrak{L}$ は変数 $\mathfrak{v}_1,\ldots,\mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1}$ を含まないようなものは，

$$(\mathfrak{v}_1)\ldots(\mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1})(\mathfrak{K}(\mathfrak{v}_1,\ldots,\mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1})\to\mathfrak{L})$$

と変形することができること[92]，および冠頭型論理式の全称記号の順序は，存在記号で分けられていないブロック内では，任意に変更してかまわないということに留意して，全称記号 $(\mathfrak{v}_1)\ldots(\mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1})$ を $(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})$ のすぐ後に付け足し，変数 $\mathfrak{v}_1,\ldots,\mathfrak{v}_{\mathfrak{r}-1}$ を $\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}+1},\ldots,\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1}$ と書き換えることにより[93]，数表記の領域で真となる論理式

$$(4)\begin{cases}(\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})\ldots(\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1})(\mathfrak{y}_1)\ldots(\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\{\Psi(\mathfrak{x}_2,\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}+1})\,\&\\ \quad\&\,\Psi(\mathfrak{x}_3,\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}+1},\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}+2})\,\&\,\Psi(\mathfrak{x}_4,\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}+2},\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}+3})\,\&\,\ldots\,\&\,\Psi(\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-2},\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1})\\ \quad\&\,\Psi(\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1},\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1},\mathfrak{y}_1)\,\&\,\Psi(\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1},\mathfrak{y}_1,\mathfrak{y}_2)\,\&\,\ldots\,\&\,\Psi(\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1},\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}-1},\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\\ \quad\rightarrow\mathfrak{B}^*(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\}\end{cases}$$

を得る．ここで，論理関数 $\Psi(a,b,c)$ はさらにパラメータ c に属す一意性論理式を満たす．ここでは，すぐにわかるように，これらの一意性論理式のうち，一番目のものを用いれば十分であるから，これを用いて，論理式 (4) に，数の領域で真となる論理式

$$(5)\qquad (x)(y)(E\,z)\Psi(x,y,z)$$

を付け加える．

論理式 (5) と，(4) を合接論理式としてつなげ，そこでの表現 $\mathfrak{B}^*(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r})$ を $\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r})$ で置き換え，3つのパラメータを持つ記号 Ψ を，3つのパラメータを持つ変数 A で置き換えることによって得られる論理式 $\mathfrak{G}$ を考えれば，これは充足可能で，(1) の形となっている．

この結果は，$\mathfrak{F}$ が充足可能である，という仮定から得られたわけであるが，逆に，今度は，論理式 $\mathfrak{G}$ の充足可能性を仮定してみる．これは，つまり，論理式 (4) と (5) での述語記号を，ある個体領域 J_1 上の論理関数の記号と解釈することができて，この解釈で，両方の論理式が真となるということである．

---

[92]述語計算の規則によって真の論理式を変形したときには，常に，再び，真の論理式が得られることに注意．

[93]この書き換えにより，$\mathfrak{r}=1$ の場合には，以下の注意はまったく必要なくなる．

(4) が真であることから，論理式

$$(\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(E\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}+1})\ldots(E\,\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1})(E\,\mathfrak{y}_1)\ldots(E\,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})(\Psi(\mathfrak{x}_2,\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}+1}) \\ \&\,\Psi(\mathfrak{x}_3,\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}+1},\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}+2})\,\&\,\ldots\,\&\,\Psi(\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-2},\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1}) \\ \&\,\Psi(\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1},\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1},\mathfrak{y}_1)\,\&\,\Psi(\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1},\mathfrak{y}_1,\mathfrak{y}_2)\,\&\,\ldots\,\&\,\Psi(\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1},\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}-1},\mathfrak{y}_\mathfrak{s})) \\ \to (\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(E\,\mathfrak{y}_1)\ldots(E\,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\mathfrak{B}^*(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

も真となる．この含意論理式では，前節は (5) により，真の論理式となっている（このことは，(5) から形式論理で導出することもできる）．したがって，これの後節も真の論理式でなければならない．しかし，この後節は $\mathfrak{F}$ から，論理式変数を適当な論理関数の記号で置き換えることで得られる．したがって，論理式 $\mathfrak{F}$ の領域 J_1 における充足が得られる．

したがって，論理式 $\mathfrak{G}$ は充足可能性に関して，論理式 $\mathfrak{F}$ と同等である．したがって，前に主張した定理が証明されたことになる．ついでながら，論理式 $\mathfrak{G}$ は，

(6) $$(x_1)\ldots(x_\mathfrak{n})(E\,y)\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_\mathfrak{n},y)$$

という形のスコーレム標準型，および

(7) $$(x_1)(x_2)(E\,y)(x_3)\ldots(x_\mathfrak{n})\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_\mathfrak{n},y)$$

という形の論理式に変形することができる．これにより，述語計算の全ての論理式に対し，(6) の形をした論理式，あるいは (7) の形をした論理式で，充足可能性に関して，もとの論理式と同等になるものを与えることができることがわかる．

以下で，ここで述べた意味論的考察に変更を加えて，有限的な証明論的考察となるようにする．ペピスの定理では，集合論的な述語理論の立場から，充足可能性と反駁不可能性の一致を用いて，全ての述語計算の論理式 $\mathfrak{F}$ に対し，(1) の形をした述語計算の論理式で，反駁不可能性に関して，$\mathfrak{F}$ と同じ振る舞いをするようなものを求めることができるという結論が導かれていたのであった．

この命題の証明は，少し前のゲーデルの完全性定理と，充足可能な論理式の反駁不可能性に関した考察でそうだったように，有限的なものにはなっていない．しかし，我々の反駁可能性の判定条件[94] を用いることにより，この証明を

[94] 243 ページ参照．

有限的な証明に翻訳することができる。実際，そのような，有限的な証明は，次のように行うことができる: まず，全ての述語計算の論理式 $\mathfrak{A}$ に対し，

$$(\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(E\,\mathfrak{y}_1)\ldots(E\,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

という形の論理式 $\mathfrak{F}$ で，$\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s}$ がここに現れる全ての個体変数で，$\mathfrak{r}$ と $\mathfrak{s}$ は 0 と異なり，パラメータを持たない論理式変数は現れず，パラメータを持つ論理式変数 A も現れないようなものを，その否定の否定が，$\mathfrak{A}$ と演繹的に同値となるように，したがって反駁可能性に関しては，$\mathfrak{A}$ と同じ振る舞いをするようなものとなるようにとることができる。したがって，定理の主張は，論理式 $\mathfrak{F}$ に対し示すことができれば十分である。

このために，再び論理式 $\mathfrak{G}$ を用いる。これは，

$$\begin{aligned}&(x)(y)(E\,z)A(x,y,z)\,\&\,(\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}+1})\ldots(\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1})(\mathfrak{y}_1)\ldots(\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\\ &\quad\{A(\mathfrak{x}_2,\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}+1})\,\&\,A(\mathfrak{x}_3,\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}+1},\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}+2})\,\&\,A(\mathfrak{x}_4,\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}+2},\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}+3})\,\&\,\ldots\\ &\quad\ldots\,\&\,A(\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-2},\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1})\,\&\,A(\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1},\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1},\mathfrak{y}_1)\,\&\,A(\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1},\mathfrak{y}_1,\mathfrak{y}_2)\\ &\quad\&\,\ldots A(\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1},\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}-1},\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\rightarrow\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\}\end{aligned}$$

という形をしているのであった。ここで，含意の前節として現れる表現

$$A(\mathfrak{x}_2,\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_{\mathfrak{r}+1})\,\&\,\ldots\,\&\,A(\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1},\mathfrak{y}_{\mathfrak{s}-1},\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

を，$\mathfrak{P}(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_2,\ldots,\mathfrak{x}_{2\mathfrak{r}-1},\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$ で表し，数表記 $2\mathfrak{r}+\mathfrak{s}-1$ を $\mathfrak{m}$ で表すことにする。ここで，我々の判定条件 1. と 3. を用いて，論理式 $\mathfrak{F}$ が述語計算で反駁可能なのは，$\mathfrak{G}$ が反駁可能となるちょうどそのときに限るということを示したい。このために，再び，前に関数 $\psi(a,b)=2^a(2b+1)$ を用いて定義した関数系 $\kappa_1,\ldots,\kappa_\mathfrak{s}$ を用いる[95]が，この際，今度は，これらの関数 $\kappa_1,\ldots,\kappa_\mathfrak{s}$ が計算可能であるという事実が用いられることになる。

まず，$\mathfrak{F}$ が反駁可能であると仮定してみよう。このときには，判定条件 1. により，ある数表記 $\mathfrak{p}$ で，論理式

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}},\ldots,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}},\kappa_1(\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}},\ldots,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}}),\ldots,\kappa_\mathfrak{x}(\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}},\ldots,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}})),$$
$$\mathrm{j}=0,\ldots,(\mathfrak{p}+1)^\mathfrak{r}-1$$

が，同時に充足可能でないようになるものを，求めることができる。

---

[95] 270 ページ以降参照。

$\mathfrak{q}$ を，表現 $\kappa_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{n}_{1,\mathfrak{j}},\ldots,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}})$,　$\mathfrak{j}=1,\ldots,\mathfrak{s}$,　$\mathfrak{j}=0,\ldots,(\mathfrak{p}+1)^{\mathfrak{r}}-1$ の値のうち最大のものとする（これは，実は，すぐわかるように，$\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{p},\ldots,\mathfrak{p})$ となるのだが，そのことは，ここでは重要でない）．このとき，$\mathfrak{F}$ に現れる論理式変数の，0 から $\mathfrak{q}$ までの区間上で定義された論理関数による，任意の置き換えにより，論理式

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,\mathfrak{j}},\ldots,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}},\kappa_1(\mathfrak{n}_{1,\mathfrak{j}},\ldots,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}}),\ldots,\kappa_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{n}_{1,\mathfrak{j}},\ldots,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}})),$$
$$\mathfrak{j}=0,\ldots,(\mathfrak{p}+1)^{\mathfrak{r}}-1$$

のうち少なくとも1つは偽となる．

ところが，このことから，$\mathfrak{G}$ に現れる論理式変数の，論理式変数の，0 から $\mathfrak{q}$ までの区間上で定義された論理関数による，任意の置き換えにより，論理式

$$(8)\qquad \begin{aligned}&A(\mathfrak{l}_1,\mathfrak{l}_2,\psi(\mathfrak{l}_1,\mathfrak{l}_2))\\ &\&\,\{\mathfrak{P}(\mathfrak{n}_1,\ldots,\mathfrak{n}_{2\mathfrak{r}-1},\mathfrak{k}_1,\ldots,\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}})\rightarrow\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_1,\ldots,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r}},\mathfrak{k}_1,\ldots,\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}})\}\end{aligned}$$

のうち少なくとも1つは偽となることが帰結される．ただし，ここで，$\mathfrak{l}_1$，$\mathfrak{l}_2$，$\mathfrak{n}_1,\ldots,\mathfrak{n}_{2\mathfrak{r}-1}$，$\mathfrak{k},\ldots,\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$ は，それぞれ 0 から $\mathfrak{q}$ までを動くものとする．これは，次のようにしてわかる．$\mathfrak{G}$ に現れる論理式変数の論理関数による任意の置き換えは，論理式変数 A の置き換えと $\mathfrak{F}$ に現れる論理式変数の置き換えからなっているが，今，A と $\mathfrak{F}$ に現れる論理式変数の数表記 $\leq\psi(\mathfrak{q},\mathfrak{q})$ 上に定義された[96]論理関数による置き換えが与えられたとしよう．この置き換えにより，ある数表記 $\mathfrak{l}_1$，$\mathfrak{l}_2\leq\mathfrak{q}$ に対し，論理式 $A(\mathfrak{l}_1,\mathfrak{l}_2,\psi(\mathfrak{l}_1,\mathfrak{l}_2))$ が真偽値“偽”を得たとすれば，0 から $\mathfrak{q}$ までの数表記の組 $\mathfrak{l}_1,\ldots,\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$ に対する論理式 (8) のうち，少なくとも1つは偽となる．もし，このような $(\mathfrak{q}+1)^2$ 個の論理式が，置き換えにより全て真の論理式となっているなら，論理式 (8) で，$\mathfrak{n}_1,\ldots,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r}}\leq\mathfrak{p}$ に対し，等式

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}&\mathfrak{n}_{\mathfrak{r}+1}=\psi(\mathfrak{n}_2,\mathfrak{n}_1),\,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r}+2}=\psi(\mathfrak{n}_3,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r}+1}),\,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r}+3}=\psi(\mathfrak{n}_4,\mathfrak{n}_{\mathfrak{r}+2}),\\ &\ldots,\mathfrak{n}_{2\mathfrak{r}-1}=\psi(\mathfrak{n}_{\mathfrak{r}},\mathfrak{n}_{2\mathfrak{r}-2}),\,\mathfrak{k}_1=\psi(\mathfrak{n}_{2\mathfrak{r}-1},\mathfrak{n}_{2\mathfrak{r}-1}),\\ &\mathfrak{k}_2=\psi(\mathfrak{n}_{2\mathfrak{r}-1},\mathfrak{k}_1),\ldots,\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}=\psi(\mathfrak{n}_{2\mathfrak{r}-1},\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}-1})\end{aligned}\right.$$

[96] ここでは，関数値 $\psi(a,b)$ が a の増大につれて大きくなり，b の増大につれても大きくなるという事実を用いて，表現が簡略化されている．

の成り立っているようなものでは——このときには，関係

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{r}+1} < \mathfrak{n}_{\mathfrak{r}+2} < \cdots < \mathfrak{n}_{2\mathfrak{r}-1} < \mathfrak{k}_1 < \cdots < \mathfrak{k}_{\mathfrak{s}},$$

$$\mathfrak{k}_1 = \kappa_1(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r}}), \mathfrak{k}_2 = \kappa_2(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r}}), \ldots, \mathfrak{k}_{\mathfrak{s}} = \kappa_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r}}), \mathfrak{k}_{\mathfrak{s}} \leq \mathfrak{q}$$

が成り立つことになるわけだが——論理式 $\mathfrak{P}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{2\mathfrak{r}-1}, \mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_{\mathfrak{s}})$ は，真偽値“真”を得ることになり，したがって，そのような $(\mathfrak{p}+1)^{\mathfrak{r}}$ 個の論理式の真偽値は，対応する論理式

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r}}, \kappa_1(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r}}), \ldots, \kappa_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r}}))$$

の真偽値と等しくなる．ところが，これらの論理式の中には，ここでの置き換えにより，真偽値“偽”を得るものが，少なくとも 1 つはあることがわかっている．

よって，論理式変数の，0 から $\psi(\mathfrak{q}, \mathfrak{q})$ までの区間上の論理関数での，任意の置き換えにおいて，論理式 (8) のうち少なくとも 1 つは偽となる．しかし，このことから，我々の判定条件 3. により——関数 ψ は，常にそのパラメータより大きい値をとり，その値は，ただ 1 つの数表記の組に対して得られるようになっている，つまり離散的な関数となっているから——論理式 $\mathfrak{G}$ は述語計算で反駁可能であることが帰結できた．

今度は反対に，論理式 $\mathfrak{G}$ が反駁可能であると仮定してみよう．このときは，判定条件 1. により，ある数表記 $\mathfrak{p}$ 以降，論理式 (8) で，$\mathfrak{l}_1$，$\mathfrak{l}_2$，$\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{2\mathfrak{r}-1}$，$\mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$ が 0 から $\mathfrak{p}$ までの数表記を動くとき，どのような $\mathfrak{G}$ 論理式変数の論理関数による置き換えによっても，これらの論理式のうち，少なくとも 1 つは偽となる．

特に，このことは，論理式変数 $A(a, b, c)$ が，数表記の 3 つ組 $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$，$\mathfrak{c}$ に対し，$\mathfrak{c}$ が，(計算可能な) 値 $\psi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ と等しいか等しくないかによって，それぞれ真偽値“真”あるいは“偽”をとるような論理関数で置き換えられているようなときにおいても成り立つ．

このような数 $\mathfrak{p}$ に対し，$\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{\mathfrak{s}})$ に現れる論理式変数，つまり，論理式 $\mathfrak{F}$ に現れる論理式変数の，0 から $\psi(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$ までの間の数表記の領域上の——他の数表記は，該当する論理式 (8) ではパラメータとして現れない——論理関数による任意の置き換えを選び，この置き換えを上で述べたような $A(a, b, c)$ の置き換えと組み合わせると，論理式 (8) で，合接節 $A(\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \psi(\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2))$ は全て真となる．したがって，これらの論理式の 1 つが真偽値“偽”を得るのは，そこ

で，$\mathfrak{P}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{2\mathfrak{r}-1}, \mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_\mathfrak{s})$ が真偽値“真”を得て，$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r}, \mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_\mathfrak{s})$ が，真偽値“偽”を得ているときに限る．ところが，この場合には，論理式変数 A の置き換えに用いられた論理関数の定義により，(0 から $\mathfrak{p}$ までの列に属す）数表記 $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{2\mathfrak{r}-1}$，$\mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_\mathfrak{s}$ は，等式 (9) を満たす．これにより，$\mathfrak{k}_\mathrm{i}$，$\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathfrak{s}$ は，$\kappa_\mathrm{i}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r})$ の値となり，したがって，これらの数表記 $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r}$ に対し，論理式

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r}, \kappa_1(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r}), \ldots, \kappa_\mathfrak{s}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r}))$$

は，真偽値“偽”を得ることになる（ここに，$\kappa_1(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r}), \ldots, \kappa_\mathfrak{s}(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_\mathfrak{r})$ の値は，$\leq \mathfrak{p}$ となる）．

このことは，$\mathfrak{F}$ に現れる論理式変数の，数表記 $\leq \psi(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$ の領域上の論理関数への置き換えの任意なものに対し成り立つから，論理式

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}}, \kappa_1(\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}}), \ldots, \kappa_\mathfrak{s}(\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}})),$$
$$\mathrm{j} = 0, \ldots, (\mathfrak{p}+1)^\mathfrak{r} - 1$$

は，同時に充足可能でないことがわかる（さらに，これらの論理式のうち，特に，$\kappa_1(\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}}), \ldots, \kappa_\mathfrak{s}(\mathfrak{n}_{1,\mathrm{j}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mathfrak{r},\mathrm{j}})$ の値が全て $\leq \mathfrak{p}$ となるものもすでに同時に充足可能でないことがわかる）．このことから，判定条件 3. により，論理式 $\mathfrak{F}$ が反駁可能であることが帰結できる．

以上で，論理式 $\mathfrak{F}$，$\mathfrak{G}$ は述語計算での反駁可能性に関し，同じに振る舞うことがわかった．ここで考察したような特殊な形をした論理式の任意のもの $\mathfrak{F}$ から，それに対応する論理式 $\mathfrak{G}$ を直接的に組み立てることができて，それは (1) の形をしている．よって，考察したような形を持った論理式 $\mathfrak{F}$ に対して，したがって，証明の初めに述べた注意により，任意の述語計算の論理式に対しても，反駁可能性に関し，これと同等な論理式で，(1) の形をしたものを得ることができる．

このようにして，ペピスの定理の証明論におけるものが，有限的に証明されたことになる．ここでみたように，証明の有限的な形成においては，新しいアイデアは何も必要でなかった．むしろ，我々の反駁可能性の判定条件により，意味論的な証明を，そこでの考え方のまま用いて，その際に，論理関数に関する考察を有限の数表記の領域に制限しさえすればよかった．しかし，一般には，意味論的な考察の有限的証明論的考察への翻訳は，ここで扱った場合のように，

容易に行えるとは限らない．場合によっては，反駁可能性の判定条件を用いずに，直接的な方法によったほうが具合いのよいこともある．

例えば,「述語計算の全ての論理式は，充足可能性に関し，ある“2変数”論理式，つまり，そこに現れる全ての論理式変数が2変数であるような論理式と同等になる」というレーベンハイムによる定理が，このような場合となる．

証明論で，この定理に対応するのは，述語計算の全ての論理式は，その導出可能性に関し，ある“2変数”論理式と同等になるというものである．この定理の証明は，例えば——エルブランが行ったように——レーベンハイムの定理の意味論的 証明を反駁可能性の判定条件を用いて，対応する証明論的な定理の有限的な証明につくり替えることによって得られる．

しかし，この定理の証明は，カルマー（L. KALMÁR）が示したように，直接的に行ったほうが，ずっと簡単なものになる[97]．

e) 種々の意味論的標準型． ここで，充足可能性に関する，論理式の同等性についての命題で，対応する反駁可能性に関する論理式の同等性についての有限的な定理にも強めることができるようなもののうち，幾つかの重要に思える新しい結果を述べておこう．これらの結果を簡明に表現するために，論理式の特殊な形で，ある変形手続きにより，任意に与えられた論理式から，そのような特殊な形をした論理式で，もとの論理式と，充足可能性に関し，同等になるようなものが得られる場合に，そのような論理式の特殊な形を“意味論的標準型”と呼ぶことにする．

特に，次のようなものが意味論的標準型となることが示されている:

1. **ゲーデルの標準型**

$$(x)(y)(E\,u)(A(x,u)\,\&\,B(y,u))\,\&\,(x)(y)(z)\mathfrak{A}(x,y,z)$$
$$\&\,(x)(E\,v_1)\ldots(E\,v_{\mathfrak{n}})\mathfrak{B}(x,v_1,\ldots,v_{\mathfrak{n}})$$

という形で，2変数論理式変数のみの現れるもの[98]．

---

[97] LÁSZLÓ KALMÁR:“Über einen Löwenheimschen Satz.” *Acta Sci. Math. Szeged*, Bd.7 (1934), Heft 2.

[98] K. GÖDEL: “Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalkuls”, *Mh. Math. Phys.* Bd.40 (1933) Heft 2 を参照．これと非常によく似た，意味論的標準型は，スコーレム（TH. SKOLEM）の論文 “Ein Satz über Zählausdrücke”, *Acta Sci. Math.*

2. カルマーの標準型

$$(x)(y)(E\,z)\mathfrak{A}(x,y,z)$$
$$\&\,(E\,u_1)\ldots(E\,u_{\mathfrak{m}})(v_1)\ldots(v_{\mathfrak{n}})\mathfrak{B}(u_1,\ldots,\,u_{\mathfrak{m}},v_1,\ldots,\,v_{\mathfrak{n}})$$

という形で，2変数論理式変数を，ただ1つだけ含むようなもの[99].

3. ペピスの標準型

$$(x)(y)(E\,z)A(x,y,z)\,\&\,(u_1)\ldots(u_{\mathfrak{n}})\mathfrak{C}(u_1,\ldots,\,u_{\mathfrak{n}}).$$

4. アッカーマンの標準型[100]

$$(x)(E\,y)A(x,y)\,\&\,(E\,z)(u_1)\ldots(u_{\mathfrak{n}})\mathfrak{B}(z,u_1,\ldots,\,u_{\mathfrak{n}}).$$

これらの標準型の全てで，論理式とは**自由個体変数を含まないもの**を指している.

注意.　ペピスの標準型では，最初の節

$$(x)(y)(E\,z)A(x,y,z)$$

は,

$$(x)(y)(E\,z)(A(x,z)\,\&\,B(y,z))$$

で置き換えることができる[101]. また――ペピスが示したのと同様のやり方で――この標準型で，2変数の論理式変数 A，B の他には，後は1つだけの1変

Szeged Bd.7 (1935) Heft 4 で証明されている. これは

$$(x)(y)(E\,u)\mathfrak{A}(x,y,u)\,\&\,(x)(y)(E\,v)\mathfrak{B}(x,y,v)\,\&\,(x)(y)(z)\mathfrak{C}(x,y,z)$$
$$\&\,(x)(E\,w_1)\ldots(E\,w_{\mathfrak{n}})\mathfrak{K}(x,w_1,\ldots,\,w_{\mathfrak{n}})$$

という形のもので，2変数論理式変数のみを含む. スコーレムの証明は，また,「全ての述語計算の論理式は，充足可能性に関し，ある2変数論理式と同等になる」というレーベンハイムの定理の新しい証明も与えることになる.

[99] L. Kalmár: "Zurückführung des Entscheidungsproblem auf den Fall von Formeln mit einer einzigen binären Funktionsvariablen", *Compositio Math.* Vol.4 (1936) No.1.

[100] W. Ackermann: "Beiträge zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik" *Math. Ann.* Bd.112 (1936) Heft 3 参照.

[101] ペピスは，これを，意味論的標準型3を構成する証明の過程において，関係 $\psi(a,b)=c$ が，$\Psi_1(a,c)$，$\Psi_2(b,c)$ という形の2つの2変数の論理関数によって表現できることを用いて示している. ここに，$\Psi_1(a,c)$ が真となるのは，2^a が c を割り切る2の冪の最大のものとなっているときとし，$\Psi_2(b,c)$ が真となるのは $2b+1$ が c を割り切る最大の奇数となっているときとする.

数の論理式変数が現れるのみであるようにできる．このことから，カルマーの標準型で，数 $\mathfrak{m}$ を3ととることができて，ここでの2番目の合接節は，ただ3つ量化詞を，初めのところに持っているようにできることが示せる[102]．

ゲーデルおよびアッカーマンの標準型では，やはりペピスが示しているように[103]，3つの2変数論理式変数と，1つの1変数論理式変数のみを用いてできる．さらに，カルマーは，アッカーマンの標準型を冠頭型にまとめたものでは，ただ1つの2変数論理式変数で十分であることを示した[104]．

標準型1.–4. から，これらの合接論理式を冠頭型に変形することにより，さらに，見通しのよい標準型が得られる．特に，ゲーデルの標準型からは，全称記号を3つしか含まないような特殊な形のスコーレム標準型が得られ，ペピスの標準型からは，存在記号を1つしか含まないようなスコーレム標準型が得られる．

カルマーの標準型は，

$$(E\,u_1)\ldots(E\,u_{\mathfrak{m}})(x)(y)(E\,z)(v_1)\ldots(v_{\mathfrak{n}})\mathfrak{C}(u_1,\ldots,\,u_{\mathfrak{m}},x,y,z,v_1,\ldots,\,v_{\mathfrak{n}})$$

という冠頭型論理式と同値になり，アッカーマンの標準型は

$$(E\,z)(x)(E\,y)(u_1)\ldots(u_{\mathfrak{n}})\mathfrak{C}(x,y,z,u_1,\ldots,\,u_{\mathfrak{n}})$$

という形の論理式と同値になる．

ここで述べた，標準型は，全て，述語計算の論理式の反駁可能性の考察における標準型にもなっている．これらを有限的な意味で証明するためには，単に，意味論的証明の有限的な翻訳を行えばよいが，このためには，我々の反駁可能性の判定条件1.，3. が——ペピスの標準型で示したように——うまく使える．

---

[102] このことについては，リンデンバウム（A. LINDENBAUM）が，このペピスの論文の論評をした際に，注意している．*Zbl. Math.* Bd.15 (1937) 参照．

[103] 少し前に引用した，ペピスの論文 “Untersuchungen über das Entscheidungsproblem der mathematischen Logik”, *Fund. Math.* Vol.30 (1938) 参照．

[104] L. KALMÁR: “On the reduction of the decision problem, first paper”, *J. of Symb. Logic* 4: 1–9 (1939).

ゲーデルの標準型およびペピスの標準型を，それぞれ冠頭型にまとめたものに対する対応する命題の証明は，後に，カルマーとスラニィ（J. SURÁNYI）により示されている．*J. of Symb. Logic* 12: 65–73 (1947)，および 15: 161–173 (1950) 参照．

最近になって，意味論的標準型に関して，幾つかの，さらによい結果が求まっている[105]．この中で，特に重要な結果として，スラニィの標準型を述べておこう．これは，

$$(x)(y)(z)\mathfrak{A}(x,y,z)\ \&\ (x)(y)(E\,u)\mathfrak{B}(x,y,u)$$

という形のもので，ここには，ただ 1 つの 2 変数の論理式変数と，後は 1 変数の論理式変数のみが現れる[106]．この標準型は，量化詞の分布に関して，ほとんど最良の結果となっている．この意味での最良の結果は，2 変数の論理式変数のみを含む

$$(x)(E\,y)(z)\mathfrak{A}(x,y,z)$$

という形の論理式が，意味論的標準型[107]になっているというものである[108]．

意味論的標準型の持つ意味は，特に，**述語計算の論理式の公理系との関係**を考察することにより明らかになる．

この関係の考察にあたっては，自由個体変数も，パラメータを持たない論理式変数も含まない論理式のみを扱えば十分である．そのような論理式の反駁不可能性は，これを公理とする，あるいはこの論理式から，そこに現れる論理式変数を同じパラメータ数を持つ述語記号で置き換えて得られる論理式からなる公理系の無矛盾性を意味する．考察している論理式が，冠頭型論理式の合接の形をしていれば，論理式変数を述語記号で置き換えた後，おのおのの合接節を，1 つ 1 つの公理としてとることができる．このようにして得られた自由個体変数を含まない，冠頭型論理式から成る公理系は，整約された形の公理系で，もとの論理式では，全称記号を，その前に持たないような存在記号だったものは個体記号で置き換えられ，$\mathfrak{k}$ 個の全称記号がそれより前にあったような存在記

[105]文献としては，W. ACKERMANN: "Solvable Cases of the Decision Problem", Amsterdam (1954) と，J. SURÁNYI: "Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems im Prädikatenkalkul der ersten Stufe", Budapest (1959) 参照．

[106]上のスラニィの本の，定理 X，72 ページ参照．

[107]"意味論的標準型" という用語の代わりに，文献では，スラニィによって用いられた "還元タイプ" (Reduktionstypus) という用語が用いられている．

[108]A.S. KAHR,E.F. MOORE, HAO WANG による "Entscheidungsproblem reduced to the ∀∃∀ case", *Proc. of the Nat. Acad. of Sc.* 48: 365–377 (1962) での研究．ここでは，J. R. BÜCHI のアイデアが用いられている．

号は，k 変数の関数記号で置き換えられているようなものに変形することができる．この整約された公理系は，すでにみたように，無矛盾性に関し，もとの公理系と同じ振る舞いをする．

ここで，2 つの述語計算の（自由個体変数もパラメータを持たない論理式変数も含まない）論理式が，反駁可能性に関して同等なら，これらに対応する整約された公理系も無矛盾性に関して同じ振る舞いをするはずである．

したがって，述語計算の論理式の反駁可能性の考察に対する標準型の，おのおののものは，任意の記号による整約のなされた公理系に対して，やはり記号による整約のなされた特殊な形を公理系で，もとの公理系と，無矛盾性に関して同じ振る舞いをするようなものが得られるという意味での**記号による整約のなされた公理系の無矛盾性の考察に対する標準型**を与えることになる．

この意味で，標準型 1.–4. と，その後に述べた 2 つの標準型は（そこで述べたこれらの標準型に，さらに付加条件を加えて強めた形のものも含めて），次のような，記号による整約のなされた公理系の無矛盾性に関する標準型に対応することになる:

1. 3 つの異なる個体変数を持ち，個体記号は含まず，1 つの 2 変数関数記号と，幾つかの 1 変数関数記号，および 2 つの 2 変数述語記号と，2 つの 1 変数述語記号の計 4 つの述語記号のみを含むような公理系．

2. 1 つの 2 変数関数記号，1 つの 2 変数述語記号，および 3 つの個体記号のみを含むような公理系．

3. 個体記号は含まず，1 つの 2 変数関数記号，および 2 つの 2 変数述語記号と，1 つの 1 変数述語記号の計 3 つの述語記号のみを含むような公理系．

4. 1 つの個体記号，1 つの 1 変数関数記号，および 1 つの 2 変数述語記号のみを含むような公理系．

（標準型 2.，3.，4. では，個体変数の数には何の制限も課されていない．）

5. 個体記号を含まず，3 つの異なる個体変数，1 つの 2 変数関数記号，および 1 つの 2 変数述語記号と，幾つかの 1 変数述語記号のみを含むような公理系．

6. 個体記号を含まず，2 つの異なる個体変数，1 つの 1 変数関数記号，および幾つかの 2 変数述語記号のみからなる公理系．

もちろん，1 階の公理系の無矛盾性の考察において，我々の反駁可能性の判定条件を，直接に用いてもよい．特に，判定条件 2* により，記号による整約のなされた形で与えられた 1 階の公理系の無矛盾性の証拠のためには，有限的な

数論的モデルによる充足を示す代わりに，**次々に区間の拡張を行いながら**，(ある数までの) **有限な数の領域**上の数学的関数および論理関数で，そこに現れる全ての項の値がこの領域内に収まるような自由変数の値の系に対し，これらの公理が真偽値“真”を得るようなものが定義できて，1 つの数の領域からさらに大きな数の領域に移行する際には，**数学的関数は拡張されるが，論理関数は任意に選ぶことができる**というような一種の擬似的な充足が示せれば十分である．この区間ごとの充足の手続きが，いくらでも先に続けられることが示せれば，問題としている公理系の無矛盾性が証明できたことになる．

ここでの，無矛盾性は，述語計算により形式化された推論証明の枠組みの中でのものである．

集合論的述語論理の立場からは，このような無矛盾性は，ゲーデルの完全性定理により，公理系の数論的（しかし一般的には必ずしも有限的でない）モデルでの充足可能性と一致し，したがってこれにより，無矛盾性は，ここでは，まったく制限のない意味論的な無矛盾性となっている．

このような，ゲーデルの完全性定理の使用に関しても，それに対応する有限的な議論が存在する．つまり，述語計算の論理式の反駁不可能な任意の論理式では，任意の“数論的に無矛盾な”形式的体系，つまり無矛盾で，(初めから付け加えられていない場合には) 数論的体系を付け加えて，帰納的数論の確証可能な論理式を（公理として）付け加えても，無矛盾であるような体系においても反駁不可能性が保たれている．この洞察を得るためには，我々がまだ行っていない処理，つまり証明論的考察の形式化を行わなければならない．

第6章　数論の形式的体系の無矛盾性証明

6.1　カルマーの無矛盾性証明[1]

ここで無矛盾性の証明を行おうとしている数論の形式的体系は，体系 (Z) である．体系 (Z) での無矛盾性の証明により，体系 (Z_μ) の無矛盾性の証明も同時に得られることになる．これは，記号 $\mu_x A(x)$ の ι-記号による定義可能性と，導入された記号の除去可能性による，両体系の関係により明らかである[2]．

すでにみたように，体系 (Z_μ) では，原始帰納的関数，および弱い意味においては，擬帰納的関数を顕現的に定義することができた[3]．他方，最初から，計算可能な，つまり，それの，各パラメータに対する数表記の値の計算方法が与えられているような，1変数，あるいは，多変数の関数の記号の導入を許すことで，体系 (Z) を，拡張することにしても，証明の実行には何の支障もきたさない．

“真”, “偽”, および論理式の “確証可能性” の概念は，計算可能性の概念と

[1]以下のカルマー (László Kalmár) による証明は，まだ発表されていない．この証明は，1938年9月に，完成された手稿として提出されている．

[2]原書 II, 338ページ (26–32行) 参照．体系 (Z) は，原書 I, 381ページで導入され〔訳注: 33ページ参照〕，記号 $\mu_x A(x)$ は，原書 I, 405ページで導入されている〔訳注: 34ページ参照〕．また，体系 (Z_μ) は，原書 II, 306ページで導入された．導入された記号の除去に関する定理は，原書 I, §8 で証明されている．〔訳注: (Z_μ) は，内容としては，体系 (Z) に，μ 記号と，それに関する公理を付け加えたものとなっている．以下の議論では，これとは異なる (Z) の拡張が考察されるので，ここでの (Z_μ) に関する議論は，ここでは，それほど重要でない．〕

[3]原書 I, 421–430ページ，および原書 II, 412–413ページ参照．

関連している．項および論理式は，そこに変数がまったく現れないとき，それぞれ，“**数式項**”，“**数式論理式**” と呼ばれる[4]. 数式論理式となっている等式は，そこに現れる関数の計算結果により，等しい数表記の値が得られるとき，“真” であるといい，そうでない場合に，“偽” であるという．真の等式には，真偽値 “真” が対応させられ，偽の等式には，真偽値 “偽” が対応させられる．

計算可能な関数を付加した後においても，体系 (Z) での全ての初等論理式は，等式であるから[5]，数式論理式として現れるのは，数の等式の命題論理による組み合せにより得られたもののみである．これらについては，命題論理の演算の真偽値関数としての解釈により，それぞれの真偽値が一意に確定する．前と同じように[6]，束縛変数も論理式変数も含まないような論理式は，そこに現れる，異なる自由個体変数に任意の数表記を代入することで，常に**真の**数式論理式が得られるとき，“**確証可能**” と呼ばれる．

この意味で，体系 (Z) の本来の公理，つまり，論理式 $a' \neq 0, a' = b' \rightarrow a = b,$ および和と積に関する帰納等式は確証可能であり，これらの公理の性質で，我々の無矛盾性証明において用いられるのは，この事実のみである．よって，最初から，上にあげた本来の公理だけでなく，他の任意の確証可能な本来の公理，特に，原始帰納関数の帰納等式，および擬帰納関数の形式的計算により得られる等式を付け加えて考えてもよいことがわかる．さらにまた，導出の簡略化のために，数式項 $\mathfrak{t}$ と，その数表記による値 $\mathfrak{z}$ に対し $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}$, または，$\mathfrak{z} = \mathfrak{t}$ という形の等式を初式として用いてよい．これらは，真の論理式となるから，確証可能である．

このようにして得られた形式的な枠組みは，述語計算に，まず最初に，等号，個体記号 0, ダッシュ記号，および等号の公理 (J_2) と帰納法の公理を付加し，さらに，計算可能な関数の記号と，検証可能な論理式を初式として用いてよい，という規則を付加することにより，得られるようなものとなっている．

---

[4]原書 I，228 ページ，本書 81 ページでは，変数を含まない論理式は，そこに現れる項が，全て数表記である場合に限り，数式論理式と呼ばれていたので，ここでの命名は，それの拡張となっている．

[5]カルマーが行ったように，さらに，決定可能な述語を，基本述語として付け加えることもできる．しかし，決定可能な述語は，ある計算可能な関数によってつくられた項 $\mathfrak{t}$ により，$\mathfrak{t} = 0$ と表すことができるので，数学的には何の拡張ともならない．

[6]原書 I，237，295，297 ページ，本書 82–83 ページ参照．

この推論体系の無矛盾性は，そこでの導出可能な数式論理式が，全て真であることが示されることで得られる．まず，前にも行ったような，準備的な考察から始める．これは，この形式的体系に，次のような簡略化を施しても，導出可能な数式論理式の全体は変化しない，ということである:

1. 帰納法の公理は，帰納法図式によって置き換えることができる[7]．

2. $(\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ という形の表現を $\overline{(E\,x)}\ \overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{x})}$ によって置き換えることで，全称記号，ならびに基本論理式 (a) および図式 (α) を除去することができる[8]．

3. 導出の**証明糸への分解**により，**代入の引き戻し**を行うことができ，これにより，論理式変数を除去することができる[9]．

4. 基本論理式 (b) と，図式 (β) で，変数 x を特定するのをやめることで，束縛変数の書き換えを行わずにすませられる[10]．

これらの変更を用いることにより，次のような推論規則の体系が得られる:

全ての論理式は，初等論理式から，命題論理の演算と存在記号によりつくられている．初等論理式は，項の間の等式である．項は，基本項，つまり 0，または自由個体変数，あるいは基本項から，ダッシュ記号や計算可能な関数の記号によりつくられる．

初式としては:

a) 命題論理で真の論理式，つまり，恒真な論理式から代入により得られるような論理式;

b)（ある項 t に対する）存在記号の論理式図式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{t}) \rightarrow (E\,\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$$

により得られる論理式，これを略して，“**存在公理の論理式**” ということにする;

c)（ある項 $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}$ に対応する）同等性の図式

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{s} \rightarrow (\mathfrak{A}(\mathfrak{r}) \rightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{s}))$$

により得られる論理式，これを略して，“**同等性論理式**” ということにする;

d) 確証可能な論理式．

---

[7]原書 I，264–266 ページ参照．

[8]原書 I，233–234 ページ参照．

[9]原書 I，220–227 ページ，230–232 ページ，ならびに 267 ページ参照．

[10]本書第 2 章 39–41 ページ参照．

推論の図式は:

a) “**分離**” の図式

$$\frac{\mathfrak{S},\ \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}}{\mathfrak{T}};$$

b) “**存在記号の推論**” の図式

$$\frac{\mathfrak{B}(\mathfrak{c}) \rightarrow \mathfrak{A}}{(E\,\mathfrak{x})\mathfrak{B}(\mathfrak{x}) \rightarrow \mathfrak{A}},$$

ここに，$\mathfrak{c}$ は，$\mathfrak{A}$ にも $\mathfrak{B}(\mathfrak{x})$ にも現れない自由変数とする;

c) 帰納法の図式（“**帰納法の推論**” の図式）

$$\frac{\mathfrak{A}(0),\ \mathfrak{A}(\mathfrak{c}) \rightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{c}')}{\mathfrak{A}(\mathfrak{t})},$$

ここに，$\mathfrak{c}$ は，$\mathfrak{A}(0)$ に現れない自由変数で，$\mathfrak{t}$ は，任意の項である．

推論図式により得られる論理式を “**下式**” と呼ぶことにして，それ以外の論理式は “**上式**” と呼ぶ．推論図式の上式として現れる2つの論理式は，“**並んでいる**” ということにする．“$\mathfrak{c}$” として表示した，存在記号の推論，あるいは，帰納法の推論での変数は，この推論での “**固有変数**” と呼ぶことにする．

これらの図式では，変数を特定していないので，自由個体変数が，同名になるのは，それが，証明の流れの中で必要になるときに限るようにすることができる．この，“**自由変数の分離**” により，さらに，それが現れる全ての場所で固有変数の役割を果たしていないような変数を，全部数表記 0 で置き換えることができる（これにより，同一性が壊されることはないし，このような変数では，証明の流れの中で，それが項であるという性質のみが用られているからである）．この手続きを，“**不必要な自由変数の除去**” と呼ぶことにする．数式論理式の導出において，自由変数の分離と，不必要な自由変数の除去を施した後では，全ての自由変数は，ある推論で固有変数として1度現れるのみで，その後，再び現れることはない．

ここで，上に述べた規則による数式論理式の導出をとり，これを，さらに，証明糸へ分解したものを考察する．この導出には，自由変数の分離，および不必要な自由変数の除去がすでに施されているものとする．終式から出発して，おのおのの証明糸の初式に至るか，存在記号の推論，あるいは，帰納法の推論の下式に至るまで遡る．この初式または下式までを含めた証明図の部分を，導出

の“**終盤**”と呼び，残りの部分を，導出の“**初盤**”と呼ぶことにする．不必要な自由変数の除去により，終盤には，自由変数はまったく現れない．さらに，終盤では，分離以外の推論は用いられていない．

もし，導出の中に存在記号がまったく現れないなら，帰納的数論に対して行った考察[11]と同様にして，終式は確証可能である，つまり，数式論理式として真であることが帰結される．したがって，このような特殊な場合においては，我々の証明はすでに得られていることになる．

この特殊な場合に適用されるアイデアは，一般の場合の取り扱いにおいても用いることができる．まず，証明の終盤の前の帰納法の推論

$$\frac{\mathfrak{A}(0),\ \mathfrak{A}(\mathfrak{c}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{c}')}{\mathfrak{A}(\mathfrak{t})},$$

つまり，このようなもので，それの下式が，終盤の最初の論理式となっているものは，除去することができる，という点に注意しておこう．実際，ここで，項 $\mathfrak{t}$ は数式項となるが，それの数表記の値を $\mathfrak{z}$ とする．このとき，$\mathfrak{z}$ は数表記 0 であるか，または，ある数表記 $\mathfrak{n}$ の次の数であるかのどちらかである．$0 = \mathfrak{t}$ が真の論理式なら，これを，初式として用いることができる．これを，論理式 $\mathfrak{A}(0)$ と同等性論理式 $0 = \mathfrak{t} \to (\mathfrak{A}(0) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{t}))$ とともに用いて，2 回の分離により，$\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ が得られる．ここでは，上式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{c}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{c}')$ は，まったく用いられていない．したがって，この論理式は，その導出とともに，取り除いてしまってかまわない．

$\mathfrak{z}$ が，ある数表記 $\mathfrak{n}'$ であるときには，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{c}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{c}')$ の導出から，変数 $\mathfrak{c}$ を全て数表記 $\mathfrak{m}$ で置き換えて得られる $\mathfrak{z}$ 個の異なる論理式の導出をつくる．ここに，$\mathfrak{m}$ は 0 から $\mathfrak{n}$ まで動くものとする．このようにして得られた終式は，

$$\mathfrak{A}(0) \to \mathfrak{A}(0'),\ \mathfrak{A}(0') \to \mathfrak{A}(0''), \ldots, \mathfrak{A}(\mathfrak{n}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{n}')$$

となる．これらの論理式を，$\mathfrak{A}(0)$ とともに用いることにより，分離の複数回の適用により，$\mathfrak{A}(\mathfrak{n}')$, つまり，$\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ が得られる．さらに，この論理式と，真の論理式 $\mathfrak{z} = \mathfrak{t}$, および同等性論理式

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{t} \to (\mathfrak{A}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{t}))$$

[11] 原書 I，295–299 ページ参照．

により，2回の分離の適用で，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ が得られる．

このような，帰納法の推論の除去を，“**帰納法の簡略化**”と呼ぶことにする．これが，実際に，常に，ある意味の簡略化になっていることは，ここでは，直ちに明らかになるわけではなく，後で示される．終盤の初めのところにある帰納法の推論の除去は，証明系に分解された証明図で一番左にあるものから除去してゆくことにする．これにより，帰納法の簡略化の手続きが一意的に決まる．帰納法の簡略化により，導出の終盤が拡張されることに注意する．

帰納法の推論が終盤の初めのところに1つも現れないとき，今度は，(以下に述べる条件のもとで)“**存在記号の簡略化**”を行うことができる．まず，これに必要になる概念と用語を導入する．

$(E\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ という形の論理式を，“**存在論理式**”と呼ぶことにする．存在公理の論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{t}) \to (E\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, および下式 $(E\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{C}$ を持つ存在記号の推論に対し，これらは，“**存在論理式** $(E\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ **に属す**”ということにする．

ある論理式の中で，存在記号が入れ子になったものの最大数を，この論理式の“**次数**”と呼ぶことにする．つまり，存在記号を持たない論理式の次数は0で，ある論理式の否定は，この論理式と同じ次数となり，2つの論理式 $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ の命題論理による結合の次数は，$\mathfrak{S}$ と $\mathfrak{T}$ の次数の最大値で，$(E\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ という形の論理式の次数は，(ある項 $\mathfrak{t}$ に対する) 論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ の次数に1を足したものとなる[12]．さらに，我々の導出に現れる論理式 $\mathfrak{F}$ に対し，その導出で，$\mathfrak{F}$ から出発して，論理式と並んでいる論理式，およびすぐ下にある論理式を，次々にとってゆくことで得られる論理式の全体に現れる次数の最大数で，$\mathfrak{F}$ の“**高さ**”を定義することにする．したがって，数式論理式である終式は，次数0で，高さも0となる．

考察している導出に現れるおのおのの論理式は，等式であるか，存在論理式であるか，あるいは，等式と存在論理式から命題論理によって組み立てられたものとなっている．このような命題論理による論理式の組み立ての際に，構成要素となっているものをカルマー (KALMÁR) の示唆に従って，論理式の“**分子**”と呼ぶことにする．ある論理式の中に構成要素として現れる存在論理式が，この論理式の分子となるのは，その存在論理式が，さらにそれを含むような存

[12] 存在記号においては，ε-項でのように (71 ページ参照)，格納と上位の区別をする必要がないので，その点において，ここでの次数の概念は，ε-項の次数の概念と対応するものとはなっていない．

在論理式の部分となっていないときに限るということに注意する．

ここで，もう1つの準備が必要となる: **終盤に現れる項の評価**ということである．すでにみたように，終盤では，全ての項は数式項となっている．評価は，終盤の全ての論理式で，極大な項の全て，つまり，他の項の部分項となっていない項[13]の全てを，数値で置き換えることでなされる．これにより，導出の性格がどのような影響を受けるかを考えてみる．

命題論理で真な論理式，および数式論理式の初式は，そのような性質を保持し，分離についても同じである．

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{s} \rightarrow (\mathfrak{A}(\mathfrak{r}) \rightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{s}))$$

という形の同等性論理式は，

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C})$$

という形の論理式に移行する．ここに，$\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{A}(\mathfrak{m})$ の評価により，また，$\mathfrak{C}$ は $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ の評価により得られている．$\mathfrak{m}$ と $\mathfrak{n}$ が等しいときには，$\mathfrak{B}$ と $\mathfrak{C}$ も等しくなる．したがって，得られる論理式は，命題論理で真となる．一方，$\mathfrak{m}$ と $\mathfrak{n}$ が異なる数表記なら，$\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$ が真の論理式となり，これと，命題論理で真の論理式

$$\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n} \rightarrow (\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}))$$

から，分離により，$\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C})$ が得られる．両方の場合とも，ここで用いた同等性論理式が初式として不要となる．

しかし，同等性論理式は，我々の導出における，幾つかの論理式から，数式項の評価のなされた論理式への推論による移行を行うために，初式として用いる必要が出てくる．ある論理式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{r})$ での数式項 $\mathfrak{r}$ の，その数表記の値 $\mathfrak{n}$ での置き換えは，形式的には，

$$\cfrac{\mathfrak{r} = \mathfrak{n},\ \mathfrak{r} = \mathfrak{n} \rightarrow (\mathfrak{F}(\mathfrak{r}) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{n}))}{\cfrac{\mathfrak{F}(\mathfrak{r}),\ \mathfrak{F}(\mathfrak{r}) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{n})}{\mathfrak{F}(\mathfrak{n})}}$$

という導出で行えることになるからである．ここでは，論理式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{r})$ 以外にも，値の等式 $\mathfrak{r} = \mathfrak{n}$ と同等性論理式が初式として用いられている．このような導出

[13] このような項は，同時に，関数表現，例えば，$2 \cdot 2 + x$ の部分でありうる．

により，ある論理式 $\mathfrak{B}$ から，対応する数式項の評価のなされた論理式 $\mathfrak{B}^*$ に移行することができる．この手続きを，“**形式化された評価**”と呼ぶことにする．終盤の初めのところに現れる存在記号の推論と，終盤での初式として現れる存在公理の論理式に，これを適用する必要がある．

数式項を，その数表記による値で置き換えるとき，存在記号の推論は，存在記号の推論としての形が保たれる．しかし，終盤の初めのところに現れる，そのような推論の上式では——この論理式は，まだ初盤に属しているわけだが——この論理式と初盤での，その他の部分との証明の辻褄を合わせるために，もとの上式から新しい上式へ移行しなくてはならなくなる．これが，もとの上式に現れる数式項の，形式化された評価により，行われることになる．この際，この手続きは，考察している導出の終盤ではなく，初盤の中で行われることになる．

これに対して，存在公理の論理式の取り扱いでは，終盤の初式として現れる $\mathfrak{A}(\mathfrak{t}) \to (E\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ という論理式で，$\mathfrak{t}$ は数式項で，その数表記による値を $\mathfrak{z}$ とする．評価により，この論理式は $\mathfrak{P} \to (E\mathfrak{x})\mathfrak{A}^*(\mathfrak{x})$ という論理式に移行する．ここに，この論理式の前節は，$\mathfrak{A}^*(\mathfrak{z})$ から，$\mathfrak{z}$ が関数のパラメータとして現れるような項が存在するなら，その評価を与えることによって得られるものである．つまり，$\mathfrak{P}$ は，$\mathfrak{A}^*(\mathfrak{z})$ と等しいか，あるいは，$\mathfrak{A}^*(\mathfrak{z})$ での，数式項を，それぞれの数表記の値で置き換えることにより得られるものとなっている．ここでは，存在公理の論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{t}) \to (E\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ の代わりに，やはり存在公理の論理式であるところの，$\mathfrak{A}^*(\mathfrak{z}) \to (E\mathfrak{x})\mathfrak{A}^*(\mathfrak{x})$ を終盤の初式として用いる．この論理式から，$\mathfrak{A}^*(\mathfrak{z})$ でまだ残っている数式項の形式化された評価を行うことにより，“**完全に評価の行われた**”論理式 $\mathfrak{P} \to (E\mathfrak{x})\mathfrak{A}^*(\mathfrak{x})$ に移行できる．

形式化された評価においては，同等性論理式は，全て存在論理式 $(E\mathfrak{x})\mathfrak{A}^*(\mathfrak{x})$ と同じ次数を持つ．また，数式項の等式は，次数 0 である．したがって，変形された導出において，存在公理の論理式 $\mathfrak{A}^*(\mathfrak{z}) \to (E\mathfrak{x})\mathfrak{A}^*(\mathfrak{x})$ は，それに対し，完全に評価の行われたものと同じ高さを持つことがわかる．

項の評価の手続きは，終盤の直前に帰納法の推論の現れないような導出について行っているのだったから，帰納法の推論の下式については考慮する必要はない．

全体として，数式項の評価により，次のことが成り立つ: 考察している導出は，再び，ここでの推論の枠組み内の導出に移行する．終盤は，その性質を保存する．さらに，ここで得られた導出では，終盤に現れる数式項は，存在公理の論理式か

ら，それの完全に評価の行われたものへの移行で現れる論理式の中のものを除いて，全て数表記となっている．終盤に属す存在公理の論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{z}) \to (E\,\mathfrak{x})\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ では，$\mathfrak{z}$ は数表記で，存在論理式は数表記以外の数式項を含まない．残りの評価は，全て，存在公理の論理式に続くもので，これは，前節 $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ に対してのみ行われる．この評価の形式化は，同等性論理式を用いることによって行われる．これに対し，終盤において，形式化された評価以外の場所では，同等性論理式は初式としては現れない．存在公理の論理式の完全に評価の行われたものは，もとの論理式と同じ高さを持つ．

数式項の評価に続いて，自由変数の分離と似た手続きを行う．ここで問題となるのは，束縛変数の分離である．つまり，我々の導出において，証明の流れの中で関連のない存在論理式の形態が，同一になることがないようにする．これは，証明の流れの中で関連のない（つまり証明の辻褄のために束縛変数が同一であることを要求されていないような）2つの存在論理式での存在記号に，異なる束縛変数を与えることで達成できる．この処置を，“**束縛変数の分離**”と呼ぶことにする．この処置は，数式項の評価とは対照的な作用を及ぼすことに注意する: 数式項の評価では，形態の異なる論理式が同じものに変換される場合があるのに対し，束縛変数の分離では，前には同じ論理式だったものが異なる形態を得ることがありうる．

これで，やっと**存在記号の簡略化**を行うための条件を与えることができるようになったが，これは，終盤の初めのところには帰納法の推論は存在せず，数式項の評価と束縛変数の分離がすでになされているような導出に対して適用される．ここでの条件は，終盤において，$(E\,\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ という形の存在論理式で，これに存在公理の論理式が属すようなものが，ある存在記号の推論に属すものと形態として同じものになっているというものである．束縛変数の分離により，これが起こるのは，両方の存在論理式が同一の証明の流れの中にあるときに限る．このときには，次の意味での “**分岐**” が起こっていることになる: 存在公理の論理式から（終式の方向に向かって）延びている証明糸は，存在記号の推論の下式を通って終式に向かって延びている別の証明糸と，ある分離で合流している．この分離の上式では，この存在論理式が分子として現れているが，これは下式には必ずしも現れない．いずれにしても，この論理式は，この分離から終式に至るまでの証明糸の中で，1度除去されており，終式の高さは0だから，この証明糸の中で論理式 $(E\,\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ の次数 g（これは，1以上である）より小さい

高さを持つ最初の論理式 $\mathfrak{K}$ が存在する．論理式 $\mathfrak{K}$ は分離 $\dfrac{\mathfrak{L}, \mathfrak{L} \to \mathfrak{K}}{\mathfrak{K}}$ ，の下式になっており，これの上式は少なくとも g と等しい高さを持つものになっている．

論理式 $(E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ に属す存在公理の論理式——これを $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to (E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ としよう——と，$(E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ に属す存在記号の推論——これを，$\dfrac{\mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{G}}{(E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{G}}$ とする——に対する分岐が，ちょうどここで起こっているわけである．存在記号の簡略化は，論理式 $\mathfrak{K}$ の導出を，ある変更を加えられた導出で置き換えることによって得られる．この新しい導出は，それぞれ，論理式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{K}$ の証明と論理式 $\overline{\mathfrak{F}(\mathfrak{z})} \to \mathfrak{K}$ の証明を与える2つの“部分証明”から，命題論理で真の論理式

$$(\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{K}) \to ((\overline{\mathfrak{F}(\mathfrak{z})} \to \mathfrak{K}) \to \mathfrak{K})$$

を用いて，分離を2回施すことによって得られる．

1番目の部分証明は，存在記号の推論の上式に現れる変数 $\mathfrak{a}$ を全て数表記 $\mathfrak{z}$ で置き換えることにより得られる．これにより，論理式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{G}$ の導出が得られるが，これから命題論理により，論理式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to ((E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{G})$ が得られる．これをもとの論理式 $(E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{G}$ の代わりに用いる．これにより，存在記号の推論が省けたことになる．論理式 $(E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{G}$ は，与えられた証明図の終盤の初式となっているが，これへの前節 $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})$ の付加は，幾つかの分離をつたって伝播されることになる．つまり，分離 $\dfrac{\mathfrak{S}, \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}$ から，上式と下式にそれぞれに含意の前節 $\mathfrak{B}$ を付け加えることにより，証明図

$$\frac{\mathfrak{B} \to \mathfrak{S}, \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}}{\mathfrak{B} \to \mathfrak{T}}, \qquad \frac{\mathfrak{S}, \mathfrak{B} \to (\mathfrak{S} \to \mathfrak{T})}{\mathfrak{B} \to \mathfrak{T}}$$

が得られるが，これらは，再び，命題論理で真な論理式

$$(\mathfrak{B} \to \mathfrak{S}) \to ((\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}) \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{T})), \quad (\mathfrak{B} \to (\mathfrak{S} \to \mathfrak{T})) \to (\mathfrak{S} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{T}))$$

により，幾つかの分離に帰着されるからである．これにより，論理式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{K}$ の導出が得られたことになる[14]．

[14] ここでの考察は，演繹定理の命題論理の部分の証明に相当する．これについては，原書 I,

2番目の部分証明は，与えられている $\mathfrak{K}$ の導出から存在公理の論理式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to (E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ に $\overline{\mathfrak{F}(\mathfrak{z})}$ という前節を付加することにより得られる．このようにして得られた論理式は命題論理で真であるから，これによって，存在公理の論理式の初式としての使用が1つ省けたことになる．ここで付加されてた前節 $\overline{\mathfrak{F}(\mathfrak{z})}$ は再び分離をつたって伝播されるから，これにより，論理式 $\overline{\mathfrak{F}(\mathfrak{z})} \to \mathfrak{K}$ の導出が得られる．得られた論理式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{K}$, $\overline{\mathfrak{F}(\mathfrak{z})} \to \mathfrak{K}$ から，論理式 $\mathfrak{K}$ を得るには，すでに述べたような，命題論理で真の論理式を用いればよい．以上が存在記号の簡略化である．

全体として，これによって，分岐が1つ除去できたことになる: 1番目の部分証明では，$(E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ に属す存在記号の推論が除去され，2番目の部分証明では $(E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ に属す（初式としての）存在公理の論理式が除去された[15]．さらに，これらの部分証明の終式の組み合わされた後では，$\mathfrak{K}$ の，したがって，対応する終式の次数は $(E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ の次数 g より小さくなっているから，存在論理式 $(E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ はもはや現れない．

帰納法の簡略化でもそうだったが，存在記号の簡略化でも，これが実際に一種の簡略化となっていることは，ただちにわかることではなく，後で示すことで初めて明らかになる．いずれにしても，証明図は存在記号の簡略化で，より複雑なものになってしまう．また，これを行った後に，終盤の範囲を取り直さなくてはならなくなる．

帰納法の簡略化でと同様に，存在記号の簡略化を，どの分岐に対して適用してゆくかを決めておくことにする．おのおのの分岐には，存在公理の論理式に対するものと，存在記号の推論に対するものの，2つの証明糸の合流するようなような分離が対応するのであった．このような分離の下式からは，全体の導出の終式に向かって証明糸が一意に延びている．したがって，このような分離の下式から終式に向かって延びている証明糸が，証明図の中で一番左にあるような分岐から順に簡略化を行い，複数の分岐が同一の証明糸に対応している場合には，上のような分離が終式から最も離れているものから簡略化を行うとい

150–151 ページ参照．ここでの考察は，しかし，前節の付加は全ての場所でではなく，証明すべき論理式に至る，ある証明糸に対してのみ行われるという点で，演繹定理におけるものとは異なる．

[15] より正確には，該当する存在記号の推論，あるいは，存在公理の論理式の1つが除去されたというべきであろう．

うふうに取り決めることにする．

帰納法の簡略化と存在記号の簡略化が，実際に，ある意味での簡略化になっていることを示す前に，帰納法の推論が終盤の直前になく，存在記号の簡略化に対する前提条件も満たされていないような場合について，考察しておこう．このときには，帰納法の推論は終盤の直前になく，さらに，終盤では，数式項の評価と束縛変数の分離を行った後では，存在公理の論理式の属す存在論理式は，(終盤の初めのところに現れる) 存在記号の推論の属すものと一致することがないような証明図が与えられていることになる．束縛変数の分離の定義により，これによって区別される論理式は，終盤での証明の流れにおいて (つまり，命題論理で真の論理式と分離 において)，同一の分子として現れないものに限るということに注意する．これにより，終盤の論理式の分子が，“真” または “偽” であるということを，次の条件で定義できるようになる: 数式論理式については，その真偽値は今まで通りのものとする．存在公理の論理式に属す存在論理式は真とし，終盤の初めのところに現れる存在記号の推論の属す存在論理式は偽とする．その他の存在論理式については，その真偽値は任意に決める．例えば，そのようなもの全てを “真” とすればよい．命題論理の結合記号は，今まで通りに，真偽値関数として解釈する．このような取り決めにより: 1. 数式論理式は今まで通りに評価される，2. 命題論理で真の論理式は，ここでの新しい定義においても真の論理式となっている，3. 終盤の存在公理の論理式，およびそれに完全に評価の行われたものは真となる，4. 終盤の初めのところにある存在記号の推論の終式は真となる，5. 真の上式に対する分離により，真の下式が得られる．

ここで，終盤の存在公理の論理式の代わりに，それの完全に評価の行われたものをとり，その上にある論理式を全部捨てると，初式が全て真の論理式となっている証明図が得られ (同等性論理式はここには現れないのであった!)，分離によっても常に真の論理式が得られている．したがって，終式は，我々の新しい定義の意味で真となっている．ところが，終式は数式論理式だから，これは，もとの意味でも真である．よって，この場合において，我々の証明したかったことが示されたことになる．

ここで用いた分子の評価においては，存在論理式であるような分子についてのみ，その真偽値が新しく定義し直され，他のものについては以前の真偽値が用いられていることに注意する．

一般の場合に対しては，ここでの規則によって構成された任意の導出に対し，帰納法の簡略化と存在記号の簡略化を有限回適用することにより，帰納法の推論が終盤の初めに現れず（数式項の評価と束縛変数の分離を行った後），終盤に分岐が現れないような導出が得られるということが示せればよい．このような“**全ての簡略化の行われた**”導出に対しては，上で述べた考察により，終盤の存在論理式であるような分子の適当な評価により，数式論理式であるところの終式が真であることが示せる．これにより，元々の導出の終式も真であることがわかる．帰納法の簡略化によっても，存在記号の簡略化によっても，終式はまったく変化を受けないし，終盤に現れる数式項の評価によって，終盤は変化を受けるが，その真偽値は変わらないからである．

したがって，ここでの規則によって構成され，前に述べたような処置のなされた任意の導出に対し，帰納法の簡略化と存在記号の簡略化を逐次に適用すると，有限回の後，この操作が修了する，つまり，全ての簡略化の行われた導出が得られることが示せれば，体系 (Z) の無矛盾性が得られたことになる．

このために，(原著 II の) §5 で導入された[16]，0-ω-図式と，これらの図式の導出の論理式への対応を用いる．ここで，0-ω-図式とこれらの間の大小関係について復習し，併せて，これらの図式の階層を順を追って導入しておく．

0 階の図式は記号 0 のみとする．1 階の図式は，$\omega^0+\omega^0+\cdots+\omega^0$ という形の和の表現で，少なくとも 1 つの項を持つものとする．大小の比較は，項の数でなされ 0 は 1 階の図式のどれよりも小さいとする．ω^0 は略して 1 とも書くことにする．今 0-ω-図式が，k 階のものまでを含めて定義され，それらの大小関係も，各階の図式はそれより前の階の図式より大きいように定義されているとする．$(k+1)$ 階では，

$$\omega^{\mathfrak{a}_1}+\omega^{\mathfrak{a}_2}+\cdots+\omega^{\mathfrak{a}_\mathfrak{r}} \qquad (\mathfrak{r}\neq 0)$$

という形の表現が加えられる．ここに，形式的な巾（べき）指数 $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_\mathfrak{r}$ は，たかだか階数 k の 0-ω-図式で，特に，$\mathfrak{a}_1$ は階数がちょうど k の 0-ω-図式であると

[16] 原著 II, 382–383 ページ参照．この種の図式による，最初のカントルの ε-数以下の順序数の導入法はゲンツェン (G. GENTZEN) による．彼の論文 “Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie”, Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, Neue Folge, Heft 4 (1938) 38–39 ページ参照．

する．この際に，大小関係（と，その普通の記法）により，$\mathfrak{a}_1 \geq \mathfrak{a}_2 \geq \cdots \geq \mathfrak{a}_\mathfrak{r}$ が成り立っているとする．$(k+1)$ 階での大小関係は，このような図式の2つ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ で，異なるものに対し，これらの図式の中の項のうち，異なる最初のもので，$\mathfrak{a}$ での巾指数の方が大きいとき，あるいは，$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{b}$ から，幾つかの項を付け足すことによって得られているとき，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{b}$ より大きい，とすることにより規定される．さらに，$(k+1)$ 階の図式は，それより前の階での全ての図式より大きいとする．

0-ω-図式とそれらの大小関係が以上のように帰納的に定義された後では，すぐにわかるように，同じ階の2つの図式に対する大小関係の規定は，異なる階の2つの図式の間の大小関係にも適用できるようになる．$(k+1)$ 階の図式では最初の項の巾指数は，それより低い階の図式の最初の項の巾指数より大きくなるからである．ただし，図式0は他の全ての0-ω-図式より小さくなる．

上のように定義された，0-ω-図式の大小関係が推移律を満たすことは，容易に確かめることができる．さらに，$\mathfrak{a}$ が0-ω-図式のとき，$\omega^\mathfrak{a}$ も0-ω-図式となり，$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が0-ω-図式で，$\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ なら，$\omega^\mathfrak{a} < \omega^\mathfrak{b}$ が成立することもわかる．$\omega^\mathfrak{a}$ の $\mathfrak{a}$ への対応づけ（“巾関数”）は，したがって，(通常の意味で）真に単調増加となる．また，$\omega^\mathfrak{a}$ は，常に $\mathfrak{a}$ より大きくなる．巾関数の繰り返しは，括弧を用いずに表現できる．例えば，$\omega^{\omega^{\omega^\mathfrak{c}}}$ という表現では，$\omega^{\omega^\mathfrak{c}}$ が，巾指数で，これの巾指数は $\omega^\mathfrak{c}$ であるというようにしか解釈できない．

“自然和” $\mathfrak{a} \# \mathfrak{b}$ は，0-ω-図式の領域上の2変数関数で，以下のように定義される:（定義式として）$\mathfrak{a} \# 0 = \mathfrak{a}, 0 \# \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ である; $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ がともに0と異なるとき，$\mathfrak{a} \# \mathfrak{b}$ は，$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ とに現れる和の項の全てを，繰り返しを含めて巾指数の大きい順に並べることによって得られる0-ω-図式である[17]．

この定義から，（値の同等性意味で）

$$\mathfrak{a} \# \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \# \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a} \# (\mathfrak{b} \# \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \# \mathfrak{b}) \# \mathfrak{c}$$

が常に成り立つことがただちにわかる．よって，2つ以上の項を持つ自然和を（括弧を用いることなく）構成することができ，その際に，項の順序は気にしな

---

[17] ここでの自然和の定義は，ヘッセンベルク (GERHARD HESSENBERG) による任意の順序数に対する自然和の定義の特殊な場合となっている．G. HESSENBERG: „Grundbegriffe der Mengenlehre“, Abh. d. Friesschen Schule, Neue Folge, Band I, Göttingen (1906) 479–706 ページ参照．

くてよい．さらに，複数の項を持つ自然和で，1つ以上の項を大きくしたとき，全体の和の値も大きくなることがわかる．したがって，自然和も，巾関数と同様に，真に単調増加である．

ここで，我々の考察の対象となっている導出のおのおのの論理式に，次のような取り決めによって，0-ω-図式を，それらの“順序数”として対応づける: 存在公理の論理式でない初式は順序数 0 を対応させる．存在公理の論理式には，順序数 1 を対応させる．存在記号の推論の下式には，その上式が順序数 $\mathfrak{a}$ を得ているときには，順序数 $\mathfrak{a} \# 1$ を対応させる．上式の順序数が，$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ となっているような分離の下式は，上式の高さが下式の高さと同じ場合には，順序数 $\mathfrak{a} \# \mathfrak{b}$ を対応させ，上式の高さが下式より k だけ大きい場合には，順序数 $\mathfrak{a} \# \mathfrak{b}$ から巾を k 回とることで得られる $\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\mathfrak{a}\#\mathfrak{b}}}}}}}$ を対応させる．上式の順序数が $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ であるような帰納法の推論の下式には，$\mathfrak{b}$ が図式 0 である場合には，順序数 $\mathfrak{a} \# 1$ を対応させ，$\mathfrak{b}$ が 0 と異なり，$\omega^{\mathfrak{c}}$ が $\mathfrak{b}$ の一番最初の（あるいは唯一の）項である場合には，$\mathfrak{a} \# \omega^{\mathfrak{c}\#1}$ を対応させる．いずれの場合にも，これにより，下式の順序数は,（項 $\mathfrak{a}$ と有限個の項 $\mathfrak{b}$ を持つ）$\mathfrak{a} \# \mathfrak{b} \# \mathfrak{b} \# \cdots \# \mathfrak{b}$ の形の，どの自然和より大きくなり，特に $\mathfrak{a}$ より大きいものとなる．

このような取り決めにより，ここで考察している形式的体系での導出におけるおのおのの論理式に対し順序数が対応づけられる．終式の順序数のことを，全体の導出の順序数と呼ぶことにする．

このような導出における論理式の順序数を決定するにあたって，分離で上式と下式の間に高さの差が生じている場合には，これらの論理式の高さが考慮されていることに注意する．このような差異が，0 より大きくなるのは，上式が，下式より高い次数を持つときに限る．論理式の高さが終式から出発して逆行してゆくことで求められるのに対し，順序数は，初式から順行して求められる．

以下のことにも注意しておく: 論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{r})$ から $\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$ への移行で，真の数式論理式 $\mathfrak{r} = \mathfrak{s}$ と同等性論理式から，2つの分離により，

$$\cfrac{\cfrac{\mathfrak{r} = \mathfrak{s}, \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{s} \to (\mathfrak{A}(\mathfrak{r}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{s}))}{\mathfrak{A}(\mathfrak{r}), \quad \mathfrak{A}(\mathfrak{r}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{s})}}{\mathfrak{A}(\mathfrak{s})}$$

として得られるものでは,（次数 0 の）等式 $\mathfrak{r} = \mathfrak{s}$ を除けば，全ての論理式は同じ次数となっている．したがって，ここでの分離では上式と下式の間の高さの

差は生じない．論理式 $\mathfrak{r} = \mathfrak{s}$ と同等性論理式は順序数 0 を持つ．したがって，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{r}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{s})$ も順序数 0 を持つことになり，$\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$ の順序数は，$\mathfrak{A}(\mathfrak{r})$ の順序数と等しくなる．よって，ここでの全ての移行により順序数はまったく変わらない．したがって，また，同じことは，このような移行の繰り返しに対してもいえて，特に，数式項の形式化された評価についてこのことが成り立つ．

次に，帰納法の簡略化によっても，存在記号の簡略化によっても，導出の順序数は減少することを示す．

帰納法の簡略化では，終盤の初めのところにある帰納法の推論

$$\frac{\mathfrak{A}(0), \mathfrak{A}(\mathfrak{c}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{c}')}{\mathfrak{A}(\mathfrak{t})}$$

が問題となる．ここに，$\mathfrak{c}$ は，自由変数で，$\mathfrak{t}$ は，数式項である．この推論に現れる 3 つの論理式は，同じ次数を持つから，これらの高さも同じである．上式の順序数を，それぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ とする．$\mathfrak{t}$ の値が 0 なら，帰納法の推論は，値の等式 $0 = \mathfrak{t}$ による $\mathfrak{A}(0)$ から $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ への移行で置き換えられる．このときには，（上での考察により）順序数は変化しない．つまり，$\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ も，$\mathfrak{A}(0)$ と同様に，順序数は $\mathfrak{a}$ となるが，もとの帰納法の推論では，下式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ の順序数は $\mathfrak{a}$ より大きいものとなっていたのであった．

$\mathfrak{t}$ が 0 と異なる数表記の値 $\mathfrak{z}'$ を持つ場合には，帰納法の簡略化により，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{c}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{c}')$ の導出は，論理式

$$\mathfrak{A}(0) \to \mathfrak{A}(0'), \quad \mathfrak{A}(0') \to \mathfrak{A}(0''), \ldots, \mathfrak{A}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{z}')$$

おのおのに対応する，変数 $\mathfrak{c}$ に，それぞれ $0, 0', \ldots, \mathfrak{z}$ を代入することによって得られる導出で置き換えられる．これらの $\mathfrak{z}'$ 個の部分導出の終式と，論理式 $\mathfrak{A}(0)$ から，一続きの分離の列により $\mathfrak{A}(\mathfrak{z}')$ が得られ，これから値の等式 $\mathfrak{z}' = \mathfrak{t}$ により，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ への移行が得られる．

このようにして論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{n}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{n}')$ ($\mathfrak{n} = 0, 0', \ldots, \mathfrak{z}$), および等式 $\mathfrak{z}' = \mathfrak{t}$ から（同等性論理式と分離により）論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ を得た際に，論理式 $\mathfrak{z}' = \mathfrak{t}$ を除けば，全ての論理式は同じ次数となっている．したがって，変形された導出において，$\mathfrak{A}(\mathfrak{n}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{n}')$ という論理式は，全て論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ と同じ高さとなっており，したがって，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ と $\mathfrak{A}(\mathfrak{c}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{c}')$ が，もとの導出で持っていた高さと同じになる．

これにより，まず，$\mathfrak{A}(\mathfrak{c}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{c}')$ の導出を，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{n}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{n}')$ ($\mathfrak{n} = 0, 0', \ldots, \mathfrak{z}$) の導出で置き換える際，これらの論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{n}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{n}')$ は，もとの論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{c}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{c}')$ と同じ順序数 $\mathfrak{b}$ を得ることがわかる．さらに，分離 $\dfrac{\mathfrak{A}(\mathfrak{n}),\ \mathfrak{A}(\mathfrak{n}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{n}')}{\mathfrak{A}(\mathfrak{n}')}$ ($\mathfrak{n} = 0, 0', \ldots, \mathfrak{z}$) により，それぞれの下式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{n}')$ の順序数は，$\mathfrak{b}$ と順序数 $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ との自然和となり，$\mathfrak{z}'$ 個の分離の連なりの後に得られる論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{z}')$ の順序数は，$\mathfrak{z}'$ 個の $\mathfrak{b}$ の和を持つ $\mathfrak{a} \# \mathfrak{b} \# \cdots \# \mathfrak{b}$ となる．また，この順序数は，$\mathfrak{A}(\mathfrak{z}')$ から $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ への移行で変化を受けない．これにより，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ も順序数 $\mathfrak{a} \# \mathfrak{b} \# \cdots \# \mathfrak{b}$ となる．そして，これは，すでにみたように，もとの帰納法の推論の下式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ の順序数より小さいものとなる．したがって，帰納法の簡略化により，終盤の初式となるこの論理式の順序数は減少する．このことは，終盤の中で論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ から全体の導出の終式に向かって，分離の列を（終盤には，これ以外の推論は現れないのであった）伝搬して終式にまで達する．分離の下式の順序数は，上式の順序数から自然和，および必要に応じては巾関数により得られ，自然和も巾関数も真に単調増加だからである．したがって，全体として，帰納法の簡略化により，終式の順序数，つまり，全体の導出の順序数は減少することが示せた．

存在記号の簡略化の考察を始める前に（上記の考察により）準備段階での，終盤に現れる数式項の評価によって，論理式の順序数はまったく変化を受けないということをもう一度思い出しておこう．

さて，自由変数の分離，不必要な自由変数の除去，終盤に現れる数式項の評価が，準備段階としてすでに行われているような導出の順序数に対する，存在記号の簡略化の影響について考察しよう．ここで，存在記号の簡略化の前提条件が満たされているものとする．つまり，終盤の初めのところに帰納法の推論は用いられておらず，終盤では，分岐のみが現れるものとする．複数の分岐が現れる場合には，前に取り決めたようにして，最初に考察されるべき分岐が選ばれているとする．この分岐で，$(E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ を，ある存在記号の推論 $\dfrac{\mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{C}}{(E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{C}}$ の下式が属し，かつ，ある（終盤の初式となっている）存在公理の論理式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to (E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$（ここに，$\mathfrak{z}$ はある数表記）も属すような存在論理式として，これらの論理式からの終式に至る証明系は，存在論理式 $(E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ が上式 $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ に分子と

して現れるような分離 $\dfrac{\mathfrak{S}, \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}$ で，合流するものとする．下式 $\mathfrak{T}$ から全体の導出の終式に至る証明系で，$\mathfrak{K}$ を，その高さ h が論理式 $(E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ の次数 g より小さくなるようなもののうち，(終式に向かって進んでゆくときに) 最初に現れる論理式とする．終盤では，全ての推論は分離であるから，$\mathfrak{K}$ も，ある分離 $\dfrac{\mathfrak{L}, \mathfrak{L} \to \mathfrak{K}}{\mathfrak{K}}$ の下式となっている（これが，分離 $\dfrac{\mathfrak{S}, \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}$ と一致することもありうる）．$\mathfrak{K}$ のとり方から，論理式 $\mathfrak{L}, \mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$ の高さは，少なくとも g で，つまり，h より真に大きなものとなっている．したがって，この高さは，論理式 $\mathfrak{L}$ の次数 l と等しくなる．よって，この分離 $\dfrac{\mathfrak{L}, \mathfrak{L} \to \mathfrak{K}}{\mathfrak{K}}$ の高さの差は，$l - h$ となっている．この分離の上式の順序数を，それぞれ $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ とする．このとき $\mathfrak{K}$ の順序数は，自然和 $\mathfrak{p} \# \mathfrak{q}$ から巾関数を $l - h$-回適用することで得られるものとなっている．

0-ω-図式 $\mathfrak{c}$ に巾関数を k-回適用したものを $\exp_k(\mathfrak{c})$ で表すことにする．つまり，

$$\exp_0(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}, \quad \exp_{k+1}(\mathfrak{c}) = \omega^{\exp_k(\mathfrak{c})}$$

である．これにより，上の導出での $\mathfrak{K}$ の順序数は $\exp_{l-h}(\mathfrak{p} \# \mathfrak{q})$ と表されることになる．

ここで，存在記号の簡略化では，初めに，論理式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{K}$ と $\overline{\mathfrak{F}(\mathfrak{z})} \to \mathfrak{K}$ をもたらす2つの部分証明がつくられ，それから論理式 $\mathfrak{K}$ が得られ，その後では，証明の流れは前と同じようになるのであった．

まず，論理式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{K}$ と $\overline{\mathfrak{F}(\mathfrak{z})} \to \mathfrak{K}$ の高さが，変更された導出で何になるかを考えてみよう．$\mathfrak{K}$ は，これらの2つの論理式から，命題論理で，2つの分離により得られるが，この際に現れる論理式の高さは，$\mathfrak{K}$ を場合によって除外すれば，全て $g-1$ となっていて，これは，$\mathfrak{F}(\mathfrak{z})$ の次数でもある（$\mathfrak{K}$ の高さ h はたかだか $g-1$ である）．したがって，高さの差が出る可能性のあるのは，2番目の分離のみで，その大きさは $d = g - 1 - h$ $(d \geq 0)$ となる．

次に，2つの部分証明の終式の順序数が何になるかをみてみよう．このためには証明での論理式の高さをみる必要がある．

1番目の部分証明では，まず，$\mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{G}$ のもとの導出から，変数 $\mathfrak{a}$ を全て数表記 $\mathfrak{z}$ で置き換えることにより，論理式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{G}$ が得られる．さらに，論理

式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{G}$ から命題論理により $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to ((E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{G})$ が得られる．これによって，もとの導出での論理式 $(E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{G}$ に前節 $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})$ が付け加えられることになり，これは，前に示したように，分離に変更を加えることで，論理式 $\mathfrak{K}$ に至る証明糸の論理式から論理式へ伝播されるようになる．この際に，おのおのの分離は，命題論理で真の論理式を付け加えることで，隣接した 2 つの分離により置き換えられる．特に，これにより，もとの導出での分離 $\dfrac{\mathfrak{L},\ \mathfrak{L} \to \mathfrak{K}}{\mathfrak{K}}$ は，証明糸が論理式 $\mathfrak{L}$ を通っているか，$\mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$ を通っているかに応じて，それぞれ，分離

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{L},\ (\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{L}) \to ((\mathfrak{L} \to \mathfrak{K}) \to (\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{K}))}{\mathfrak{L} \to \mathfrak{K},\ ((\mathfrak{L} \to \mathfrak{K}) \to (\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{K}))}}{\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{K}}$$

または

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to (\mathfrak{L} \to \mathfrak{K}),\ (\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to (\mathfrak{L} \to \mathfrak{K})) \to (\mathfrak{L} \to (\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{K}))}{\mathfrak{L},\ \mathfrak{L} \to (\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{K})}}{\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{K}}$$

で置き換えられる．

両方の場合とも，下式の高さは $g-1$ となっているが，他の論理式の高さは，論理式 $\mathfrak{L}$ の次数 l となっており，これは，少なくとも g 以上である．特に，このことは，論理式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{L}$, あるいは $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to (\mathfrak{L} \to \mathfrak{K})$ についていえる．よって，これらの論理式は，変更された導出の中で，もとの導出の対応する論理式 $\mathfrak{L}$, あるいは $\mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$ と同じ高さになっている．このことから，この論理式から，論理式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to ((E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{G})$ に遡るとき，変更された導出と，もとの導出での互いに対応する論理式は同じ高さになっていることもわかる．さらに，変更された導出で，論理式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{G}$ を得る際にも，そこでの論理式は，もとの導出で $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{G}$ を得る際の，対応する論理式の高さと等しくなっていることもわかる．

したがって，変更を受けた導出での論理式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{G}$ はもとの論理式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{G}$ と同じ順序数を得る．論理式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{G}$ から論理式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to ((E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{G})$ への命題論理による移行は，高さの差の生じない分離によってなされるが，この際，この論理式は，$\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{G}$ と同じ順序数，つまり，$\mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{G}$ が前に得

ていたものを得るが，一方，この存在記号の推論の下式 $(E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{G}$ は 1 だけ大きい順序数を得ている．つまり，ここで，もとの導出に比べて順序数は減少する．このことは，論理式 $(E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x} \to \mathfrak{G})$ から論理式 $\mathfrak{K}$ に至る証明系を，対応する，論理式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to ((E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{G})$ から $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{K}$ に至る証明系で置き換える際にも，保たれるか，あるいは，さらに強化される．これは，自然和と巾関数の単調性，および（上式の 1 つで）新しく現れる前節 $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})$ のために，もとの分離に代わって，用いられる命題論理の移行では，高さの差が大きくならないということによる．ここで考察しているもとの証明系は論理式 $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$ の 1 つを通っている．第 1 番目の部分証明で，これに対応する論理式には，前節 $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})$ が加わり，順序数は，さらに小さくなっている．したがって，$\mathfrak{p}'$ と $\mathfrak{q}'$ を，ここで $\mathfrak{L}$ と $\mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$ に対応して現れる論理式の順序数とすれば，$\mathfrak{p}' \# \mathfrak{q}' < \mathfrak{p} \# \mathfrak{q}$ となる．分離 $\dfrac{\mathfrak{L},\ \mathfrak{L} \to \mathfrak{K}}{\mathfrak{K}}$ に代わって現れるのは，前に述べたような（場合に応じて異なる）形を持つ，2 つの分離となる．両方の場合とも，最初の分離では高さの差は生じず，この分離の下式は，これの左側の上式と同じ順序数となる．2 番目の分離では，高さの差は正の数 $j = l - g + 1$ となり，両方の上式の順序数は，場合によっては順序が逆になるが，$\mathfrak{p}'$ と $\mathfrak{q}'$ である．したがって，この部分証明の終式の順序数は $\exp_j(\mathfrak{p}' \# \mathfrak{q}')$ となる．

今度は，2 番目の部分証明について考えてみよう．ここでは，存在公理の論理式 $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}) \to (E\mathfrak{x})\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ に前節 $\overline{\mathfrak{F}(\mathfrak{z})}$ が前付けされることにより，論理式 $\overline{\mathfrak{F}(\mathfrak{z})} \to \mathfrak{K}$ が得られている．これにより，この順序数 1 の存在公理の論理式に代わって，順序数 0 の命題論理で真の論理式が現れることになる．ここで生じた順序数の減少は，前と同じように，もとの存在公理の論理式から論理式 $\mathfrak{K}$ に至る証明系を，対応する，論理式 $\overline{\mathfrak{F}(\mathfrak{z})} \to \mathfrak{K}$ に至る証明系で置き換える際にも，保たれる．もとの論理式 $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$ のうち 1 つは，前節 $\overline{\mathfrak{F}(\mathfrak{z})}$ を得るが，これの順序数は減少する．よって，$\mathfrak{p}''$ と $\mathfrak{q}''$ を対応する 2 つの論理式の順序数とすれば，$\mathfrak{p}'' \# \mathfrak{q}'' < \mathfrak{p} \# \mathfrak{q}$ となっている．ここで，1 番目の部分証明のときとまったく同様に，2 番目の部分証明の終式 $\overline{\mathfrak{F}(\mathfrak{z})} \to \mathfrak{K}$ は，順序数 $\exp_j(\mathfrak{p}'' \# \mathfrak{q}'')$ を得ることになる．

両方の部分証明の終式から論理式 $\mathfrak{K}$ への 2 つの分離による移行で高さの差の生ずる可能性のあるのは，すでにみたように，2 番目の分離のみで，ここでの高さの差は，$d = g - 1 - h$ である．これにより，先に求めた 2 つの部分証明

の終式の順序数の値から，変更された導出での $\mathfrak{K}$ の順序数は

$$\exp_d(\exp_j(\mathfrak{p}' \# \mathfrak{q}') \# \exp_j(\mathfrak{p}'' \# \mathfrak{q}''))$$

となる．

論理式 $\mathfrak{K}$ のもとの導出での順序数は $\exp_{l-h}(\mathfrak{p} \# \mathfrak{q})$ であった．ところが，

$$l - h = (l - g + 1) + (g - 1 - h) = j + d$$

で，

$$j > 0, \qquad d \geq 0, \qquad \mathfrak{p}' \# \mathfrak{q}' < \mathfrak{p} \# \mathfrak{q}, \qquad \mathfrak{p}'' \# \mathfrak{q}'' < \mathfrak{p} \# \mathfrak{q}$$

となっている．また，0-ω-図式の間の順序関係と，巾関数の単調性から，$\mathfrak{c}' < \mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'' < \mathfrak{c}$, $j > 0$, $d \geq 0$ に対し，

$$\exp_d(\exp_j(\mathfrak{c}') \# \exp_j(\mathfrak{c}'')) < \exp_{d+j}(\mathfrak{c})$$

となる．したがって，存在記号の簡略化により，論理式 $\mathfrak{K}$ の順序数は減少し，これは，全体の導出の終式にまで伝播する．つまり，存在記号の簡略化により，全体の導出の順序数も減少することになる．

帰納法の簡略化においても，存在記号の簡略化においても，それを導出に適用することにより，この導出の順序数は減少するというここで得られた結果により，我々が求めている帰納法，および存在記号の簡略化の列が有限回の後に停止するということの証拠は，0-ω-図式の下降列が有限回のステップの後に停止する，つまり，図式 0 に行き着く，ということの証拠に帰着される．この証明を以下に示す[18]．

0-階，および 1-階の図式については，この主張が成り立つことは，初等的な考察により明らかである．主張が k-階までの 0-ω-図式について成り立つこと

[18] カルマーは，この証明を，ゲンツェンが彼の論文 „Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie“, *Math. Ann.* Bd.112 (1930), 555 ページ以降で，最初のカントルの ε-数以下の順序数に関する超限帰納法を証明したときの考察により行っている．ゲンツェン自身も，後の無矛盾性証明で，この論文を引用しているが，そこでは，この論証は暫定的なもので，この問題は後に再び取り上げる予定であると言っている．(„Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie“, Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, Neue Folge, Heft 4 (1938), 44 ページ参照.) 我々のここでの考察は，今述べたゲンツェンの考察や，原書 II，§5，3 c) での考察とは異なり，特殊な超限帰納法はまったく用いず，直接 0-ω-図式を扱うものとなっている．

を仮定して，$k+1$-階でも成り立つことを示す．手短かに表現するために，0-ω-図式で，これから出発する任意の下降列が有限回ステップの後に停止することがわかっているとき，この 0-ω-図式は“下降有限”であるということにする[19]．この表現を用いれば，我々の示したいことは: k-階 $(k \geq 1)$ までの 0-ω-図式が全て下降有限であることがわかっているとき，$(k+1)$-階の 0-ω-図式も全て下降有限であるとなる．

まず，$\omega^{\mathfrak{a}}$ という形の図式について証明を行えばよいことに注意する．なぜなら，($(k+1)$-階の) 図式 $\mathfrak{c}$ が $\omega^{\mathfrak{a}_1}+\cdots+\omega^{\mathfrak{a}_r}$ という形をしていて，$\mathfrak{a}_1 \geq \mathfrak{a}_2 \geq \cdots \geq \mathfrak{a}_r$ なら，$\omega^{\mathfrak{a}_1+1}$ は，やはり $(k+1)$-階で，これより大きいものとなり，$\mathfrak{c}$ からの任意の下降列は，まず，$\omega^{\mathfrak{a}_1+1}$ から $\mathfrak{c}$ に降りて，その後，この $\mathfrak{c}$ からの下降列をつなぐことによって得られる $\omega^{\mathfrak{a}_1+1}$ からの下降列に対応づけることができるからである．

もう1つの補助的な考察として，$\omega^{\mathfrak{a}}$ が下降有限であることがわかっているとき，それから，任意の和 $\omega^{\mathfrak{a}}+\omega^{\mathfrak{a}}+\cdots+\omega^{\mathfrak{a}}$ も下降有限であることが以下のようにして示せる．このような和が $m+1$ 個の項からなっているとして，通常のように，これを $\omega^{\mathfrak{a}}\cdot(m+1)$ で表すことにすると，$\omega^{\mathfrak{a}}\cdot(m+1)$ からの下降列の要素では $\omega^{\mathfrak{a}}\cdot m$ より小さくならない限り，最初の m 個の和の項は変化しない．これらの m 個の互いに等しい項を除外すると，$\omega^{\mathfrak{a}}$ から出発する下降列が得られ，これは仮定により有限回のステップの後に停止する．したがって，有限回のステップの後に，$\omega^{\mathfrak{a}}\cdot(m+1)$ から出発した下降列は $\omega^{\mathfrak{a}}\cdot m$，あるいは，これより小さい図式に到達することがわかる．一般性を失うことなく，有限回のステップ後にちょうど $\omega^{\mathfrak{a}}\cdot m$ に到達するとしてよい．そうでない場合には，この図式を下降列の適当な場所に挿入すればよい．これによって下降列の長さは1つ大きくなるだけだからである．$\omega^{\mathfrak{a}}\cdot(m+1)$ から $\omega^{\mathfrak{a}}\cdot m$ に有限のステップで到達したのと同じように，$\omega^{\mathfrak{a}}\cdot m$ から $\omega^{\mathfrak{a}}\cdot(m-1)$ へも有限のステップの後に到達できる．... これを繰り返して，$\omega^{\mathfrak{a}}\cdot(m+1)$ から，有限回のステップの後に下降列は 0 に到達することがわかる．

ここで，今度は，巾 $\omega^{\mathfrak{a}}$ からの下降列を考察する．1番目のステップで，図式 $\omega^{\mathfrak{a}_1}+\cdots+\omega^{\mathfrak{a}_r}$ $(\mathfrak{a}_1 \geq \cdots \geq \mathfrak{a}_r)$ に到達したとする．ここに $\mathfrak{a} > \mathfrak{a}_1$ である．

[19]“下降有限”という表現にまどわされて，これが 0-ω-図式の，初等的に決定可能な性質であるように思ってしまってはいけない: 2-階以上の図式については，可能な下降列の数は無限になるので，これらの全てをチェックすることは不可能となるからである．

この図式は，$\omega^{a_1}\cdot r$ と等しいか，それより小さいものになっている．(等しくない場合には) 図式 $\omega^{a_1}\cdot r$ をここに挿入しても，下降列の長さは 1 つ大きくなるだけである．したがって，ω^{a} が下降有限であるかどうか，という問題は，$\omega^{a_1}\cdot r$ が下降有限であるかどうか，という問題に帰着されることになり，この問題は，上で行った補助的な考察により，ω^{a_1} が下降有限であるかどうか，という問題に帰着される．ω^{a_1} についても，同様のことがいえる．つまり，ω^{a_1} が下降有限であるかどうかという問題は，（上で述べたのと同様に）下降列の 1 番目のステップのところで，a_1 より小さい，ある a_2 に対して，ω^{a_2} の下降有限性の問題に帰着できる．このように続けて行くことにより，巾指数の下降列 $a > a_1 > a_2 > \cdots$ が得られる．a は，たかだか k-階の図式であったから，これは有限回のステップの後に停止するするが，巾指数 0 に対しては，下降有限な巾 ω^0 が得られる．したがって，全ての下降のプロセスは有限回のステップの後に停止することがわかる．

注意．　図式 ω^{a} の下降有限性から ω^{a_1} の下降有限性に移行した際に,「ω^{a_1} が下降有限なら ω^{a} も下降有限である」という内容の定理が主張されているわけではないことに注意する．ω^{a} の下降有限性が，ω^{a_1} の下降有限性を確かめることに帰着されているのは，そのような定理によるものではなくて，ω^{a} からの下降列の 1 番目のステップに依存しているのである[20]．

6.2　アッカーマンの無矛盾性証明

ここで説明する無矛盾性の証明 (“無矛盾証明”) は，数論の形式的体系 (Z) に，ε-論理式

$$A(a) \to A(\varepsilon_x A(x))$$

を付加することによって得られる体系に対するものである．この証明は，ヒルベルトのもともとの ε-記号の除去の証明方針に基づき，本書第 4 章，第 4 節で細説したアッカーマンのアイデアをさらに進めたものとなっている．そこでの手法だけでは，一般的な場合に対しては，思ったような結果を得ることができないのであった．

[20] チェスのステイル・メイトで生じる状況が，これにいくらか似ている．

しかし，ゲンツェンが，証明論的手法の拡張，つまり，最初の ε-数までの一般化された帰納法を用いることにより，数論の形式的体系の無矛盾証明が得られることを示したとき，アッカーマンはヒルベルトの証明方針に基づく手法を，同様の証明論的手法の拡張のもとで用いると，完全な無矛盾証明に補うことができる，ということに気づいた．

この証明を示すにあたって，第 4 章 ですでに子細に述べた準備段階[21]については，改めて細部にわたって述べることは避け，必要な点について以下に列挙するにとどめる:

1. 問題としている体系は，帰納法の公理を，論理式

$$A(a) \to \varepsilon_x A(x) \neq a'$$

で置き換え，初等的な公理

$$a \neq 0 \to (\delta(a))' = a$$

を付け加えることにより簡略化される．ここに 1 変数関数 δ は，基本関数（ダッシュ関数，和，および積）に新たに付け加えられるものとする．

2. 無矛盾性の証拠にあったっては，任意の導出可能な無変数な論理式が，真偽値関数と算術的関数の付値，および数表記の間の等式の普通の解釈に関して，真の論理式となることが示せれば十分であることに注意する．

これに関して付け足しておくと，ここで考察する数論の形式的体系に付加することのできる関数に果たされる制限は，数表記のパラメータに対し，値の**具体的なな計算方法が与えられている**という点のみである．このような関数に対しては，束縛変数も論理式変数も含まない，つまり，具体的には，等式か，等式を命題論理の記号で結合した形の公理で，自由変数に任意な数表記を代入するとき，真の論理式が得られるような，つまり，確証可能であるようなものを付け加えてよい．

公理

$$a \neq 0 \to (\delta(a))' = a$$

も，関数 δ の値の計算の帰納等式 $\delta(0) = 0$, $\delta(n') = n$ に関して，確証可能なものとなっている．

---

[21] 140–142 ページおよび 146–172 ページ参照．

等式以外に，他の数論の初等論理式を含めることもできるが，これによる拡張は，本質的なものとはならない．初等的な数論的関係，例えば，$a < b$, a は b を割り切るなどは，計算可能な，原始帰納的ですら，ある関数により等式として表現できるからである．

3. 無変数の論理式の導出に対しては，ε-論理式による量化詞の除去[22]，さらに，代入の初式への引き戻しを適用することができる．これらの手続きが施された後では，証明の流れの中では，推論図式と束縛変数の書換えのみが行われているようになる．また，全ての初式は次のようにできる: 初式は，恒真の論理式，あるいは，確証可能な論理式から代入で得られているか，“同等性図式”

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \to (\mathfrak{A}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{b}))$$

から得られているか，図式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})),\ \mathfrak{A}(\mathfrak{k}) \to \varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \neq \mathfrak{k}'$$

のうちの１つである．ここに項 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{k}$ は自由変数を含まないものとする．最後の２つの形をした初式を，それぞれ “第１種”, および “第２種” の “問題点となる論理式” と呼ぶことにして，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ に属すということにする．上のような性質を持った証明図を “正規化された証明” と呼ぶ．

4. 無変数な論理式の正規化された証明で，ε-項に数表記の値を対応させ，この対応は，同じ形態の ε-項には同じ値を得るようになっており，この ε-項への付値，ならびに，算術的関数の計算規則と，通常の数値等式の評価，真偽値関数の値の決定により，初式が全て真偽値 “真” を得ているなら，終式も真偽値 “真” を得る．推論図式では，常に，真の論理式から再び真の論理式が得られるからである．このことから，全ての正規化された証明に対し，上で述べたような条件を満たすような，ε-項の値の取り決めが得られることが示せれば，我々の無矛盾証明が得られたことになる．初式のうち，恒真な論理式，あるいは，確証可能な論理式から得られたものは，任意の ε-項の一意的な評価で真偽値 “真” を得る．したがって，ここで気をつけなければならないのは，同等性図式から得られた初式と，第１種，および第２種の問題点となる論理式のみである．

5. ε-項の値への付値にあったっては，ε-項の組み合わされ方を考慮することが必要になるが，これに関連して，ε-項，または，ε-表現の**格納**と**上位**の概念,

---

[22] 59–60 ページ参照．

ならびに，ε-項の**次数**と，ε-表現の**階数**が，用いられる[23]．さらに，**基本タイプ**の概念が用いられる: “ε-項の基本タイプ” といういい方をするが，略して単に基本タイプともいうことにする．基本タイプは，ε-項のうち，その真の要素として現れる項は自由変数となっており，これらの自由変数が，どれも繰り返し現れないようなものである．全ての ε-項には，それに属す基本タイプが，自由変数の名前の違いを除いて一意に決まって，ε-項は，(その基本タイプと一致しない場合には）基本タイプの自由変数に適当に項を代入することで得られるものとなる．（混乱が生じない場合には）このようなものを単に “ε-項の基本タイプ” と呼ぶことにする．基本タイプでは，その自由変数（“パラメータ変数”）の呼び替えが自由に行われてよいことにする．

ある ε-項に問題点となる論理式が属しているときには，その問題点となる論理式は，この ε-項の基本タイプに属すということにする．

注意．　ε-項に現れる束縛変数については，束縛変数の呼び替えを除いて等しい2つの ε-項は，付値に関しては，断りなく，それらを同じ形態の ε-項とみなして扱うことにする[24].

ある ε-項の基本タイプは，同時に，この ε-項の自由変数を束縛変数に書き換えて得られる ε-表現の基本タイプであるともいうことにする．

6. ε-項の付値は，基本タイプを用いて行うのがよいことがわかる．正規化された証明に現れる ε-項は，自由変数を含んでいないのであった．このような ε-項は，基本タイプと等しく，この基本タイプぱパラメータ変数を含まず，付値として，対応する数表記がとられるか，それ以外の場合には，この ε-項は，その基本タイプ

$$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$$

で，パラメータ変数 $\mathfrak{v}_1,\ldots,\mathfrak{v}_n$ を含むものから，これらに，それぞれ，項 $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n$ を代入することで得られている．このような基本タイプの付値では，変数 $\mathfrak{v}_1,\ldots,\mathfrak{v}_n$ を持ち，値として数表記を持つ関数が採用される．ここに，この関数値は有限個のパラメータの値の組に対してのみ0以外のものとなる．$\varphi(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$ を基本タイプ $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$ に対応する関数とすると，ε-項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$ の付値は，関数値 $\varphi(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n)$ によって決まり，したがって，この

---

[23] 68–71 ページ参照.

[24] 58 ページのこれに対応する注意を参照.

ためには，項 $\mathfrak{t}_1,\ldots,\mathfrak{t}_n$ の付値がこれに先立って求まっていなければならない．これらの項は，それぞれ，数表記か，数表記から計算可能な関数により得られるものか，あるいは，これは再び ε-項か，1つ以上の ε-項を構成要素として含んでいる．これらの ε-項に対しては，再び付値がなされなけらばならない．しかし，項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}_1,\ldots,\mathfrak{t}_n)$ の構成要素として現れる ε-項は，全てこの項より次数が低くなっているから，この手続きは，やがて停止する．このような ε-項の評価において，格納されているε-項は，ε-項の基本タイプによって決まる幾つかの算術的関数の合成に対応させられる．他の項を構成要素として含まないような ε-項のみが，関数でなく数表記の値に対応させられることになる．

ε-項を基本タイプによって評価する方法をとるのは，特に，評価の過程において，評価を直接 ε-項に対して行ったときに起こりうる悪循環を避けるためである．もし評価を直接 ε-項に対して行うとすると，考察の対象となっている全ての ε-項の評価がそれに依存してしまう可能性があるからである．例えば，ε-項

$$\varepsilon_x\mathfrak{A}(x,\varepsilon_y\mathfrak{B}(x,y))$$

に属する第1種の問題点となる論理式の場合がこのような例となる．この ε-項を $\mathfrak{e}$ と表すことにすると，問題点となる論理式は

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k},\,\varepsilon_y\mathfrak{B}(\mathfrak{k},y)) \,\rightarrow\, \mathfrak{A}(\mathfrak{e},\varepsilon_y\mathfrak{B}(\mathfrak{e},y)))$$

という形をしていることになる.この含意の後節を評価するためには,項 $\varepsilon_y\mathfrak{B}(\mathfrak{e},y)$ の値が確定している必要がある．ところが，ε-項 $\mathfrak{e}$ に与えられた数表記の値 $\mathfrak{z}$ いかんによって，異なる ε-項 $\varepsilon_y\mathfrak{B}(\mathfrak{z},y)$ を評価しなけらばならなくなる．

基本タイプによる評価法により，このような煩雑さを避けるためことができるようになる: このときには，算術的関数に対応させられるべき基本タイプの全体は，考察している正規化された証明に現れる ε-項の全体により，あらかじめ決定されているからである．

上で述べた方法の他の利点は，同等性図式から得られた論理式は，付加的な処理を何も施さずにも，自動的に真偽値“真”を得るようになることである．このような論理式は,

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{b} \,\rightarrow\, (\mathfrak{A}(\mathfrak{a}) \,\rightarrow\, \mathfrak{A}(\mathfrak{b}))$$

という形をしている．項 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が評価により異なる数表記の値を得たとすれば，外側の含意の前節は真偽値“偽”を得ることになり，したがって，全体の論理

式は真偽値“偽”を得る．一方，これらの項が同じ数表記の値を得ているときには，我々の評価方法からすぐにわかるように，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{a})$ は，常に，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{b})$ と同じ真偽値を得ている．$\mathfrak{A}(\mathfrak{a})$ での $\mathfrak{a}$ を構成要素として含んでいるような全ての項は，同様に構成された $\mathfrak{A}(\mathfrak{b})$ の項に対応するからである．したがって，再び全体の論理式は真偽値“真”を得ることになる．

よって，無矛盾性の証明の課題は，正規化された証明に初式として現れる第1種と第2種の問題点となる論理式を適当な評価により，真の論理式にする，という課題に帰着されることがわかる．

このために，まず，問題点となる論理式に現れる ε-項の基本タイプの全てを整列する必要がある．特に，この際に低い階数の基本タイプが，より高い階数の基本タイプより先になるようにしなければならない．

これらの基本タイプへの算術的関数の対応付けのことを“全置換”と呼ぶ[25]．全置換により，問題点となる論理式に現れる ε-項，および，そこに現れる ε-項から，1つ以上の項の構成要素を，何らかの数表記で置き換えて得られるような全ての ε-項の値が一意に定められる．

ある項が，全置換により数表記 $\mathfrak{z}$ をその値として得るとき，この項は，この全置換により，“数表記 $\mathfrak{z}$ に還元される”ともいうことにする．同様に，ある論理式についても，それが全置換により，“真”あるいは“偽”に還元されるといういい方をすることにする．また，ある論理式 $\mathfrak{F}$ から $\mathfrak{F}$ に現れる項を，全置換 $\mathfrak{G}$ によって還元された，それらの数表記の値で置き換えることにより論理式 $\mathfrak{F}_1$ が得られているとき，$\mathfrak{F}$ は全置換 $\mathfrak{G}$ により $\mathfrak{F}_1$ に還元されるということにする．

もともとのヒルベルトの ε-記号の除去に関する証明方針[26]は，全置換の列がつくられ，この列について，それが有限回のステップの後に，全ての問題点となる論理式が真偽値“真”を得るようなものに到達していることを示す，というものであった．

そこでの，中心的なアイデアは，第1種の問題点となる論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}))$$

---

[25]“全置換”という用語のこのような用法は，162ページで，別の用法（152 ページ参照）を変更して導入されていた．

[26]148 ページ以降参照．

が，全置換 $\mathfrak{G}$ により真偽値 “偽” を得るとき，数表記 $\mathfrak{z}$ で，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ がこの全置換で真偽値 “真” を得るようなものをみつけられるということである．なぜなら，項 $\mathfrak{k}$ が，$\mathfrak{G}$ により，数表記 $\mathfrak{z}$ に還元されるとすれば，上のような問題となる論理式が偽となるためには，前節 $\mathfrak{A}(\mathfrak{k})$, したがって，$\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ は $\mathfrak{G}$ により，真偽値 “真” を得ていなければならないからである．数表記 $\mathfrak{z}$ から出発して，0 から $\mathfrak{z}$ までの数表記で，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ が “真” に還元されるようなもののうち最小の $\mathfrak{n}$ に移ることができる．この数表記を $\mathfrak{z}_0$ とすれば，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ に属す，第 1 種と第 2 種の問題点となる論理式は，そこでの $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ が $\mathfrak{z}_0$ により置き換えられるとき，$\mathfrak{G}$ により “真” に還元される．第 2 種の問題点となる論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{l}) \to \varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \neq \mathfrak{l}'$$

についても，これはがいえるのは，$\mathfrak{G}$ により，この項 $\mathfrak{l}$ が数表記 $\mathfrak{m}$ に，還元されるとすれば，論理式 $\mathfrak{z}_0 \neq \mathfrak{m}'$ が真であるか，$\mathfrak{m}$ は $\mathfrak{z}_0$ より小さいかのどちらかだが，後者では，$\mathfrak{A}(\mathfrak{m})$, つまり，$\mathfrak{A}(\mathfrak{l})$ が $\mathfrak{G}$ により “偽” に還元されるからである．

しかしながら，この事実を用いて次々に全置換の構成を行おうとすると，ε-項の格納と上位の関係の多様な可能性により，困難が生じることになり，このために，全置換の列の構成が，実際に先に進むようにするために，もう 1 つ別の指針が必要となる．この指針は，アッカーマンにより与えられたものであるが，これは，おのおのの全置換 $\mathfrak{G}$ が次の条件を満たすようにするというものである: $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, c_1, \ldots, c_r)$ が基本タイプの列の中の 1 つで，$\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r$ を任意の数表記とし，さらに $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r)$ は $\mathfrak{G}$ により数表記 $\mathfrak{z}$ に還元されるとするとき，$\mathfrak{z}$ は数表記 0 であるか，または，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r)$ は $\mathfrak{G}$ で，“真” に還元されるが，$\mathfrak{z}$ より小さい，どの数表記 $\mathfrak{p}$ に対しても，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{p}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r)$ は $\mathfrak{G}$ によって “偽” に還元されるかのどちらかとなっている．

このような条件を満たす全置換のことを，**“許容される”** 全置換と呼ぶことにする．

許容される全置換の例としては，パラメータを持たない基本タイプには数表記 0 を対応させ，パラメータを持つ基本タイプには同じ数のパラメータを持つ関数で常に値 0 をとるものを対応させる **“0-置換”** がある．

全置換の列のうち，最初の全置換としては，いずれの場合にも 0-置換をとる．

許容される全置換 $\mathfrak{G}$ では，第 2 種の問題点となる論理式は “真” に還元され

る，ということも注意しておこう．なぜなら，そのような問題点となる論理式で，基本タイプ

$$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r)$$

に属すものは，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r) \to \varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r) \neq \mathfrak{k}'$$

という形をしていて，全置換 $\mathfrak{G}$ により，項 $\mathfrak{k}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ が数表記 $\mathfrak{n}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r$ に還元され，項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r)$ は $\mathfrak{z}$ に還元されるなら，この問題点となる論理式は，まず

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{n}, \mathfrak{z}, \ldots, \mathfrak{z}_r) \to \mathfrak{z} \neq \mathfrak{n}'$$

に還元されることになる．この論理式では，後節が真の論理式であるか，$\mathfrak{n}'$ と $\mathfrak{z}$ が等しくなるかのどちらかが成り立つが，後者の場合には，$\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{z}$ より小さくなり，したがって，許容される全置換の性質から，前節は $\mathfrak{G}$ で“偽”に還元される．

したがって，許容される全置換のみを扱うことにすれば，第2種の問題点となる論理式を考慮する必要はまったくなくなる．

さらに，許容される全置換 $\mathfrak{G}$ の性質から，$\mathfrak{G}$ において，第1種の問題点となる論理式は，それの属している ε-項が，許容される置換 $\mathfrak{G}$ で0と異なる数表記に還元されているときには，$\mathfrak{G}$ により“真”に還元されることもわかる．なぜなら，そのような論理式

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r)\, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r)$$

は，まず，

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{n}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r)$$

という形の論理式に還元される．ここに，$\mathfrak{n}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r$ は項 $\mathfrak{k}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ が $\mathfrak{G}$ で還元される数表記で，$\mathfrak{z}$ は基本タイプ

$$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r)$$

が $\mathfrak{G}$ で対応づけられる関数の，パラメータの組 $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r$ における値である．このとき，$\mathfrak{z}$ が0と異なるなら，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r)$ は，この許容される

全置換 $\mathfrak{G}$ において“真”に還元される．したがって，考察していた問題点となる論理式も“真”に還元されることがわかる．

のみならず，許容される全置換 $\mathfrak{G}$ で，少なくとも 1 つの第 1 種の問題点となる論理式を“偽”に還元するようなものが与えられたときに，これから新しい許容される全置換を構成する手続きが存在する: このような，$\mathfrak{G}$ により“偽”に還元される問題点となる論理式に属す ε-項の全体を考える．このような ε-項の基本タイプのうち，前に決めておいた基本タイプの列で 1 番最初にくるものをとる．$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r)$ をこの基本タイプとして，$\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$ を，この基本タイプを持つ ε-項に属すような問題点となる論理式で，$\mathfrak{G}$ で“偽”に還元されているものとする．このような論理式の 1 つが属すような ε-項は，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r)$ という形をしている．全置換 $\mathfrak{G}$ により，項 $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ はある数表記 $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r$ に還元され，項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r)$ は，許容される全置換の性質から，0 に還元される．項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r)$ には“偽”に還元される問題点となる論理式が属しているからである．このようにして現れる数表記の r-組のうち，r-組の番号づけで一番小さな番号を持つものをとる（番号づけは，まず r-組の中の最大数の順に並べ，最大数が等しいときには辞書式に並べるというように決められる[27]）．$\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r$ をこの $\mathfrak{r}$-組とする．論理式 $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$ のうちで，これの属する ε-項にパラメータとして現れる項が $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r$ に還元されるものは，$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r)$ を前節として持っているとする．このような前節の全ては，$\mathfrak{G}$ により“真”に還元され，一方，項 $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ は $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r$ に還元され，$\mathfrak{k}$ は，それぞれある数表記に還元される．項 $\mathfrak{k}$ の還元される数表記のうちで一番小さいものを $\mathfrak{z}_0$ として，さらに，$\mathfrak{z}^*$ を $0', 0'', \ldots, \mathfrak{z}_0$ のうち，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r)$ が“真”に還元されるような最小のものとする（$\mathfrak{A}(0, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r)$ は“偽”に還元されるのだったから，0 は初めから除外してよい）．このとき，$\mathfrak{G}$ で，基本タイプ $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r)$ に対応させられていた関数に変更を加え，パラメータの値の組 $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r$ で値 $\mathfrak{z}^*$ をとり，その他の r-組では，もとの値が保たれているようにする．先に選んでおいた順序に関して，基本タイプ $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r)$ より前にあるような基本タイプについては，対応する関数はそのままにするが，これより後の基本タイプのものについては，全てを 0-置換に戻す．

---

[27] この番号づけは，前にすでに用いている．234 ページ参照．

$\mathfrak{G}$ からこのようにして得られた全置換 $\mathfrak{G}'$ が**許容される**全置換であることを，次に示す．

ここで確かめる必要があるのは，基本タイプの列の中の全ての基本タイプ $\varepsilon_{\mathfrak{y}}\mathfrak{C}(\mathfrak{y}, c_1, \ldots, c_n)$ について，全ての数表記の n-組 $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$ で，項 $\varepsilon_{\mathfrak{y}}\mathfrak{C}(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n)$ が $\mathfrak{G}'$ において 0 と異なる数表記 $\mathfrak{z}$ に還元されているなら，論理式 $\mathfrak{C}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n)$ は "真" に還元されるが，全ての $\mathfrak{z}$ より小さな数表記 $\mathfrak{p}$ については $\mathfrak{C}(\mathfrak{p}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n)$ は真偽値 "偽" を得るという条件を満たしているということである．この際に，基本タイプ $\varepsilon_{\mathfrak{y}}\mathfrak{C}(\mathfrak{y}, c_1, \ldots, c_n)$ の下位に別の ε-表現が存在している場合には，これらに対応する ε-項が論理式 $\mathfrak{C}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_1)$，あるいは $\mathfrak{C}(\mathfrak{p}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n)$ に現れる，ということに留意する必要がある．

例えば，基本タイプ $\varepsilon_x\mathfrak{C}(x, c)$ が，詳しく書いたときに $\varepsilon_x\mathfrak{B}(x, c, \varepsilon_y\mathfrak{H}(x, y, c))$ となっているなら，対応する論理式 $\mathfrak{C}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1)$ は $\varepsilon_x\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1, \varepsilon_y\mathfrak{H}(\mathfrak{z}, y, \mathfrak{z}_1))$ という形をしており，同様に $\mathfrak{C}(\mathfrak{p}, \mathfrak{z}_1)$ は $\varepsilon_x\mathfrak{B}(\mathfrak{p}, \mathfrak{z}_1, \varepsilon_y\mathfrak{H}(\mathfrak{p}, y, \mathfrak{z}_1))$ という形となっている．

しかしながら，論理式 $\mathfrak{C}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n)$，および $\mathfrak{C}(\mathfrak{p}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n)$ にこのようにして現れる ε-項は，ε-項（基本タイプ）$\varepsilon_{\mathfrak{y}}\mathfrak{C}(\mathfrak{y}, c_1, \ldots, c_n)$ より低い階数を持つ．いま，基本タイプ $\varepsilon_{\mathfrak{y}}\mathfrak{C}(\mathfrak{y}, c_1, \ldots, c_n)$ が，$\mathfrak{G}'$ の構成で取り上げられている基本タイプ $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r)$（これを手短かに $\mathfrak{e}$ と表すことにする）より，我々の基本タイプの列で前にあるときには，これよりさらに低い階数の基本タイプも $\mathfrak{e}$ より前にあるわけであるから，これらは，$\mathfrak{G}'$ で $\mathfrak{G}$ と同じ関数が対応づけられている．したがって，$\mathfrak{e}$ より基本タイプの列で前にあるような基本タイプに対しては，$\mathfrak{G}$ でと同様に，$\mathfrak{G}'$ でも許容される全置換の条件は満たされている．一方，$\mathfrak{e}$ より後にある基本タイプに対しては 0-置換が対応しているので，これらに対しては，許容される全置換の条件は，自明に成り立っている．後は，基本タイプ $\mathfrak{e}$，つまり $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r)$ を調べればよい．これに対しては，r-組 $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r$ と異なる，全ての数表記の r-組 $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r$ に対しては，項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n)$ は $\mathfrak{G}'$ では $\mathfrak{G}$ と同じに還元されており，全ての数表記 $\mathfrak{z}$ に対し，($\mathfrak{e}$ より低い階数の ε-項しか含んでいない）論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r)$ も $\mathfrak{G}'$ で $\mathfrak{G}$ とまったく同様に還元される．一方，r-組 $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r$ に関しては，項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x}, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r)$ は $\mathfrak{G}'$ で，数表記 $\mathfrak{z}^*$ に還元され，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{z}^*, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r)$ は $\mathfrak{G}$，したがって $\mathfrak{G}'$ で，"真" に還元されるが，全ての $\mathfrak{z}^*$ より小さい数表記 $\mathfrak{p}$ に対しては，$\mathfrak{A}(\mathfrak{p}, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r)$ は "偽" に還元される．

以上により，0-置換から出発して，許容される全置換の列を次々に構成していき，全置換が問題点となる論理式の全てを“真”に還元していない場合には——ここで問題になるのは第1種の問題点となる論理式のみであった——次の全置換で，ある基本タイプに対応づけられた関数の1つの関数値（あるいは，もっと簡単なケースでは，この基本タイプに対応づけられた数表記）のみが前の全置換とは異なるようなものが得られるようになった．

したがって，この許容される全置換の列が，常に，いつかは停止するということことが示せればよい．

これの証拠のために，アッカーマンの方法にならって以下で幾つかの概念を導入する．

基本タイプのあるパラメータの組み合わせへの 0 と異なる関数値の対応づけ（あるいはパラメータを持たない基本タイプへの 0 と異なる値の対応づけ）を“例証置換”と呼ぶことにする[28]一番最初の 0-置換を除くと，全ての全置換において，基本タイプのうちで，対応する関数，あるいは数表記による評価が前の数表記でのものと異なるような最初のものがある．そのようなものの，基本タイプの列の中での番号を，この全置換の“特徴的な基本タイプ番号”と呼び，この基本タイプから数えたときの基本タイプの数を，この全置換の“特徴的な数”ということにする．

全置換は，その生成の順序にしたがって $\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1, \ldots$ と枚挙することにする．全置換 $\mathfrak{G}_k$ は，それよりも前の全置換 $\mathfrak{G}_i$ の全ての例証置換が $\mathfrak{G}_k$ で保持されているとき，$\mathfrak{G}_i$ 上で“進歩的”であるという．$i < k$ に対して，全置換 $\mathfrak{G}_k$ は，常に $\mathfrak{G}_i$ では現れない例証置換を含んでいる．なぜなら，$\mathfrak{G}_j$ を全置換 $\mathfrak{G}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{G}_k$ のうち最小の特徴的な基本タイプ番号を持つものとすれば，$\mathfrak{G}_j$ では $\mathfrak{G}_i$ では現れない例証置換が導入されているが，これは，(我々の全置換の更正法から）それより後の全置換でも保たれるからである．

$\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_h$ を，我々の基本タイプの列に現れる基本タイプを持った ε-項の列で，そこに現れる ε-項に格納された ε-項の全ては，この項より前に現れるようなものとする．ε-項の有限列がこのような性質を満たすようにするには，ε-

[28] この命名では，基本タイプ $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r)$ のパラメータの値 $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r$ における全置換で新しく取り決められる 0 と異なる関数値（あるいは数表記の値）が論理式 $\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r)$ をこの全置換で“真”に還元させるような例となっている，という点が考慮されている．

項の数への対応で，異なる ε-項は異なる数に対応づけられ，ε-項が，他の ε-項の構成要素となっているときには，この ε-項はこれを含む項より小さな数に対応づけられるようなものをとる[29]．ここで，この有限列での ε-項は，対応づけられた数に関し，小さい順に隣り合わせになって並んでいるようにすればよい．このような ε-項の順序が適当に選ばれて固定されているものとし，上のような条件を満たす ε-項の列を ε-項の "正規" 列と呼ぶことにする．

全置換 $\mathfrak{G}$ の ε-項の正規列 $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_h$ に関する "還元数" とは，

$$n_0 \cdot 2^h + n_1 \cdot 2^{h-1} + \cdots + n_{h-1} \cdot 2 + n_h$$

という表現の値のこととする．ここに，n_j $(j = 0, \ldots, h)$ は，ε-項 $\mathfrak{a}_j$ が全置換 $\mathfrak{G}$ で 0 に還元されるか，あるいは 0 と異なる数表記に還元されるかによって，1 または 0 の値をとるものとする．

特に，全置換 $\mathfrak{G}_i$ の還元数で我々が考察することになるのは，次の 2 種類の ε-項の正規列に関してである．まず第 1 に，考察の対象になっている第 1 種の問題点となる論理式のどれかに現れるような ε-項の全てからなる（初めに固定した順序に関する）列，第 2 に，$\mathfrak{G}_i$ で数表記 $\mathfrak{z}^*$ をみつけて次の全置換を得るために考察される論理式

$$\mathfrak{A}(0, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r), \mathfrak{A}(0', \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r), \ldots, \mathfrak{A}(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r)$$

に現れる ε-項の（再び初めに固定した順序に関する）列である．

$\mathfrak{G}_i$ の 1 番目の ε-項の列に関する還元数を，手短かに，$\mathfrak{G}_i$ の "第 1 還元数" と呼び，2 番目のものに関するものを $\mathfrak{G}_i$ の "第 2 還元数" と呼ぶことにする．

全置換のこれらの還元数に対し幾つかの事実が必要となる．

補助定理 1.　全置換 $\mathfrak{G}_i$ は第 1 還元数に関し，それの次の全置換と同じにならない．

なぜなら，$\mathfrak{G}_i$ から $\mathfrak{G}_{i+1}$ への移行で，ただ 1 つの基本タイプ $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, a_1, \ldots, a_r)$ がパラメータの組 $(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r)$ に対する新しい例証置換を得ることになる．この際に，数表記 $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r$ は $\mathfrak{G}_i$ で "偽" に還元される問題点となる論

[29] このためには，原著 II，§5，306–309 ページで体系 (Z_μ) に対して導入した数への対応〔訳注: 数の素因数分解を用いて記号列を数に適当にコード化することで得られる対応〕で，そこで μ-記号に対してなされていたことを ε-記号に対して置き換えて行えばよい．

理式の属している ε-項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r)$ から得られている．項 $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ は $\mathfrak{G}_i$ で $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r$ に還元され，項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r)$ は 0 に還元される．ここで，項 $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ に現れる全ての ε-項が $\mathfrak{G}_{i+1}$ で $\mathfrak{G}_i$ と同じに還元されるなら，これらの項は $\mathfrak{G}_{i+1}$ でも再び数表記 $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r$ に還元される．ところが，項 $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r)$ は $\mathfrak{G}_{i+1}$ と異なる数表記に還元されるから，$\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r)$ も $\mathfrak{G}_{i+1}$ では $\mathfrak{G}_i$ とは異なったものに還元される（これは，勿論，パラメータ $\mathfrak{a}_i$ の数 r が 0 の場合にも成り立つ）．そうでない場合には，項 $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ に現れる ε-項の少なくとも 1 つは $\mathfrak{G}_{i+1}$ で $\mathfrak{G}_i$ とは異なったものに還元されるが，このような項も，我々の第 1 種の問題点となる論理式に現れる ε-項の列に属している．よって，いずれの場合にも，この列の中に，$\mathfrak{G}_{i+1}$ で $\mathfrak{G}_i$ でとは異なったものに還元される項が少なくとも 1 つは存在する．このような違いは，両方の全置換のうち，この ε-項が片方で 0 に還元され，もう片方で 0 と異なる数表記に還元されていることから起こっている．$\mathfrak{G}_i$ から $\mathfrak{G}_{i+1}$ への移行の際に起こる基本タイプの付値の変化は，関数値 0 の代わりに 0 と異なる値が現れるか，あるいは，ある基本タイプにおいて 0-置換に戻るかのどちらかであるからである．したがって，第 1 還元数を決める表現

$$n_0 \cdot 2^h + n_1 \cdot 2^{h-1} + \cdots + n_{h-1} \cdot 2 + n_h$$

で，数 $n_0, \ldots, n_h$ のうちの少なくとも 1 つは変化し，これによって，この表現の値も変化する．

補助定理 2. 全置換 $\mathfrak{G}_k$ が $\mathfrak{G}_i$ 上で進歩的なら，ε-項の正規列の中の ε-項は $\mathfrak{G}_i$ と $\mathfrak{G}_k$ でまったく同じに還元されるか，または，$\mathfrak{G}_k$ のこの列に関する還元数は，$\mathfrak{G}_i$ のそれより小さくなる．

なぜなら，最初の場合が成り立っていないなら，$\mathfrak{a}_j$ をこの列の中の ε-項で，$\mathfrak{G}_k$ で $\mathfrak{G}_i$ でとは異なって還元される最初のものとして，この項は基本タイプ $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, c_1, \ldots, c_r)$ からパラメータ変数 $c_1, \ldots, c_r$ を項 $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_r$ で置き換えることにより得られている，とする．$\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_r$ に現れる全ての ε-項は，やはり考察している正規列に現れるが，これらは全て $\mathfrak{a}_j$ より前に現れている．したがって，このような項は，$\mathfrak{G}_k$ でも $\mathfrak{G}_i$ でと同じに還元されている．よって，項 $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_r$ は $\mathfrak{G}_k$ でも $\mathfrak{G}_i$ でと同様に還元される．ここで $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r$ を，これらの項が両方の全置換において還元される数表記とすれば，基本タイプ $\varepsilon_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, c_1,$

$\ldots, c_r)$ は，$\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r$ において，$\mathfrak{S}_k$ では $\mathfrak{S}_i$ とは異なった値に還元されている．$\mathfrak{S}_k$ は $\mathfrak{S}_i$ 上で進歩的であるから，この変化は，0-置換から例証置換への移行によるものでなければならない．したがって，全置換のここで考察している ε-項の正規列に関する還元数を定める表現

$$n_0 \cdot 2^h + n_1 \cdot 2^{h-1} + \cdots + n_{h-1} \cdot 2 + n_h$$

では，$n_0, \ldots, n_{j-1}$ は $\mathfrak{S}_i$ と $\mathfrak{S}_k$ で等しくなっているが，これに対し，n_j は $\mathfrak{S}_i$ では値 1, $\mathfrak{S}_k$ では値 0 をとることになる．

補助定理 3.　全置換 $\mathfrak{S}_k$ が全置換 $\mathfrak{S}_i$ 上で進歩的なら，$\mathfrak{S}_k$ の第1還元数は $\mathfrak{S}_i$ のものより小さいか，あるいは，この還元数は等しく，$\mathfrak{S}_k$ の第2還元数は $\mathfrak{S}_i$ のものより小さくなるか，あるいはまた，両方の還元数は $\mathfrak{S}_i$ と $\mathfrak{S}_k$ で等しく，$\mathfrak{S}_k$ に続く全置換 $\mathfrak{S}_{k+1}$ は再び $\mathfrak{S}_{i+1}$ 上で進歩的となり，$\mathfrak{S}_{i+1}$ と同じ特徴的な数を持つものとなる．さらに，このときには，$\mathfrak{S}_k$ から $\mathfrak{S}_{k+1}$ への移行での新しい例証置換は，$\mathfrak{S}_i$ から $\mathfrak{S}_{i+1}$ に移行するときのものと同じになる．

なぜなら，まず補助定理 2 を，第1還元数を定める ε-項の列に適用すると，$\mathfrak{S}_k$ に対するこの還元数は $\mathfrak{S}_i$ でよりも小さいか，あるいは，考察している第1種の問題点となる論理式のどれかに現れる ε-項の全ては，$\mathfrak{S}_i$ と $\mathfrak{S}_k$ とで同じに還元されている．後者の場合には，新しい例証置換の構成でこれに対応する問題点となる論理式は $\mathfrak{S}_i$ と $\mathfrak{S}_k$ とで同じものになっている．$\mathfrak{S}_k$ には，$\mathfrak{S}_i$ と同様な次の全置換 $\mathfrak{S}_{k+1}$ が続くから，$\mathfrak{S}_{k+1}$ の特徴的な基本タイプ番号 l は $\mathfrak{S}_{i+1}$ と同じになる．さらに，このときには $\mathfrak{S}_i$ と $\mathfrak{S}_k$ の第2還元数は，同じ ε-項の全体に対するものとなっている．ここで再び補助定理 2 により，この ε-項の列に関する $\mathfrak{S}_k$ の還元数，つまり第2還元数は，$\mathfrak{S}_i$ より小さいか，または $\mathfrak{S}_k$ では，この列の中の ε-項は，全て $\mathfrak{S}_i$ でと同じに還元されているかのいずれかであるが，後者の場合には，$\mathfrak{S}_{k+1}$ に現れる例証置換は $\mathfrak{S}_{i+1}$ で現れるものと等しくなる．さらに，$\mathfrak{S}_{i+1}$ に現れる例証置換の全ては $\mathfrak{S}_{k+1}$ でも現れる．なぜなら，$\mathfrak{S}_{i+1}$ の例証置換は，$\mathfrak{S}_i$ で，番号 $\leq l$ の基本タイプの付値によるものと，$\mathfrak{S}_{i+1}$ で付け足される例証置換であるが，$\mathfrak{S}_k$ は $\mathfrak{S}_i$ 上で進歩的だから，$\mathfrak{S}_i$ の例証置換は，$\mathfrak{S}_k$ にも存在し，番号 $\leq l$ の基本タイプに関する例証置換については，これらは $\mathfrak{S}_k$ から $\mathfrak{S}_{k+1}$ への移行の際に保たれる．また，この際に付け加えられる例証置換も，$\mathfrak{S}_i$ から $\mathfrak{S}_{i+1}$ への移行の際に付け加えられ

るのと同じものである．したがって，全置換 $\mathfrak{S}_{k+1}$ は $\mathfrak{S}_{i+1}$ 上で進歩的であることがわかる．

ここで，今度は，“全置換の m-列”，および “m-列のインデックス” という概念を導入する: 全置換の列 $\mathfrak{S}_i, \mathfrak{S}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{S}_{i+p}$ は $p = 0$ のとき，つまり，この列がただ 1 つの全置換からなっているとき，1-列であるという．$\mathfrak{m} > 1$ に対し，$\mathfrak{S}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{S}_{i+p}$ の特徴的な数は $\mathfrak{m}$ より小さいが，$\mathfrak{S}_i$ は 0-置換 $\mathfrak{S}_0$ であるか，あるいは，これの特徴的な数は $\geq \mathfrak{m}$ で，さらに，$\mathfrak{S}_{i+p}$ が一番最後の全置換でない場合には，$\mathfrak{S}_{i+p+1}$ の特徴的な数も $\geq \mathfrak{m}$ となっているとき，この全置換の列は m-列であるという．つまり，m-列 $\mathfrak{S}_i, \mathfrak{S}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{S}_{i+p}$ では，列 $\mathfrak{S}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{S}_{i+p}$ は，両側にこれ以上延ばせないような，特徴的な数 $< \mathfrak{m}$ を持つ全置換の列となっている．この定義では，$(\mathfrak{m}+1)$-列は同時に m-列でもありうる．しかし，一般には，$(\mathfrak{m}+1)$ 列は，幾つかの m-列からなっていて，これらの部分列の中の 2 番目以降のでの一番初めの全置換は，全て特徴的な数 $\mathfrak{m}$ を持っている．

さらに，$(\mathfrak{m}+1)$-列の全置換では，最後の $\mathfrak{m}$ 個のものを除く全ての基本タイプに対する付値は，互いに一致することもわかる．

1-列はただ 1 つの全置換 $\mathfrak{S}$ からなっているのであったが，これのインデックスを 0-ω-図式 $\omega^1 \cdot r + \omega^0 \cdot s$ あるいはもっと手短かに $\omega \cdot r + s$ と定義する．ここに $\mathfrak{r}$ は $\mathfrak{S}$ の第 1 還元数で，$\mathfrak{s}$ は第 2 還元数とする．$(\mathfrak{m}+1)$-列で，インデックス $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ を持つ m-列の連なりからなるようなもののインデックスは，図式 $\omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_h}$ と定義する．このように定義された m-列のインデックスが $\mathfrak{m} > 1$ の場合にも 0-ω-図式になっていることを証明するために，$\mathfrak{m}$ から $\mathfrak{m}+1$ への推論で，$(\mathfrak{m}+1)$-列で隣あって並んでいる m-列のインデックスが，0-ω-図式の下降列となっていることを以下で示す．

この証明とともに，全置換の列がいつかは停止し，したがって，全ての問題点となる論理式が “真” に還元されることを示す，という我々の目標も達せられたことになる．

これは次のようにしてわかる: 0-ω-図式の下降列は有限回の後に停止するのであった[30]．したがって，$(\mathfrak{m}+1)$-列で隣合って並んでいる m-列のインデックスが 0-ω-図式の下降列をなしているなら，おのおのの $(\mathfrak{m}+1)$-列はたかだか有

[30]訳注: 306–307 ページ参照．

限個の $\mathfrak{m}$-列から成っていなくてはならない．これにより，まず 2-列はたかだか有限個の 1-列からなる，つまり，たかだか有限個の全置換からなることがわかり，さらに $\mathfrak{m}$ から $\mathfrak{m}+1$ への推論により，全ての $\mathfrak{m}$-列はたかだか有限個の全置換しか含まないことがわかる．

ところが，g を我々の基本タイプの列に現れる基本タイプの数とすれば，我々の全置換の列は，どの段階でも $(g+1)$-列の初めの部分となっている．全置換の特徴的な数はたかだか g だからである．したがって，この列は有限個の全置換の後に停止しなければならない．よって，実際に，あとは，$(\mathfrak{m}+1)$-列で隣合って並んでいる $\mathfrak{m}$-列のインデックスが下降列になっていることを示せば十分である．

このために，まず我々の補助定理 3 から次の帰結を導き出しておく: 全置換 $\mathfrak{G}_k$ が他の $\mathfrak{G}_i$ 上で進歩的であるとき，$\mathfrak{G}_k$ のインデックスは $\mathfrak{G}_i$ のものより小さいか，あるいは，この 2 つの全置換のインデックスは等しく，$\mathfrak{G}_k$ に続く全置換 $\mathfrak{G}_{k+1}$ は $\mathfrak{G}_{i+1}$ 上で進歩的となり，これの特徴的な数と例証置換は $\mathfrak{G}_{i+1}$ のものと同じになる．

この命題は最初の場合については，補助定理 3 の最初の場合に対応して，全置換のインデックス $\omega \cdot r + s$ が小さくなるのは，その第 1 還元数 r が小さくなるとき，あるいは，第 1 還元数は同じままで，第 2 還元数が小さくなるときであることから導かれる．他の場合については，この命題は補助定理 2 の 3 番目の場合から直接に帰結できる．

これに補助定理 1 を加えることにより，さらに次のことがわかる: 全置換 $\mathfrak{G}_{i+1}$ が $\mathfrak{G}_i$ 上で進歩的なら，$\mathfrak{G}_{i+1}$ のインデックスは $\mathfrak{G}_i$ のものより小さくなる．

この定理から，2-列を形成する全置換の列は，インデックスの下降列を持つということが直ちにわかる: 2-列の中の全置換は，最初のものを除くと全て特徴的な数 1 を持ち，したがって，特徴的な基本タイプ番号 g を持つ．よって，これらの全置換の全てで例証置換は保たれる．つまり，これらの全置換の（再び最初のものを除く）全ては，その前のものの上で進歩的となる．したがって，上で述べた補助定理 1 の帰結をこれに応用することができる．よって，2-列の全置換のインデックスは減少してゆくから，まず，このような 2-列は有限回のステップの後停止することがわかり，したがって，さらに $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ をこれらの全置換のインデックスとすれば，2-列のインデックスとして定義されていた

図式 $\omega^{\alpha_1}+\cdots+\omega^{\alpha_n}$ は 0-ω-図式となることも帰結される．

同時に，これにより，2つの（必ずしも隣り合わせになっていない）2-列では，片方の列の中の最初の全置換のインデックスが，もう一方の列の中の最初の全置換のインデックスより大きい場合には，その列のインデックスも，もう一方のものより大きいことがわかる．さらに，次のことも成り立つ：2つの（必ずしも隣り合わせになっていない）2-列

$$\mathfrak{G}_i,\ \mathfrak{G}_{i+1},\ldots$$
$$\mathfrak{G}_{i+p},\ \mathfrak{G}_{i+p+1},\ldots$$

で，$\mathfrak{G}_{i+r}$ と $\mathfrak{G}_{i+p+r}$ の前まで全置換のインデックスが等しく，$\mathfrak{G}_{i+r}$ は $\mathfrak{G}_{i+p+r}$ より大きいインデックスを持つなら，1番目の 2-列のインデックスは2番目のもののインデックスより大きい．

ここで，2-列について確かめられたことが，$\mathfrak{m}\geq 2$ に対しても，一般に $\mathfrak{m}$-列で成り立つことが示せればよい．示すべきことは次のようになる：

(1) 考察する必要のある数 $\mathfrak{m}$ について，全ての $(\mathfrak{m}-1)$-列のインデックスとなる図式は 0-ω-図式である．

(2) $\mathfrak{m}$-列で隣あって並んでいる $(\mathfrak{m}-1)$-列のインデックスは下降列となっている．

(3) $\mathfrak{G}_i$ と $\mathfrak{G}_{i+p}$ から始まる2つの（必ずしも隣りあって並んでいない）$\mathfrak{m}$-列が与えられて，$\mathfrak{G}_i$ の方が $\mathfrak{G}_{i+p}$ より大きなインデックスを持つとき，最初の $\mathfrak{m}$-列は2番目のものより大きなインデックスを持つ．同じことは，2つの $\mathfrak{m}$-列がそれぞれ

$$\mathfrak{G}_i,\ \mathfrak{G}_{i+1},\ldots,\ \mathfrak{G}_{i+r}$$
$$\mathfrak{G}_{i+p},\ \mathfrak{G}_{i+p+1},\ldots,\ \mathfrak{G}_{i+p+r}$$

と始まっていて，$\mathfrak{G}_{i+r}$ のインデックスは $\mathfrak{G}_{i+p+r}$ より大きいが，$0\leq j<r$ に対しては，$\mathfrak{G}_{i+j}$ は $\mathfrak{G}_{i+p+j}$ と同じインデックスとなっており，$1\leq j\leq r$ に対しては，$\mathfrak{G}_{i+j}$ は $\mathfrak{G}_{i+p+j}$ と同じ特徴的な数を持っているような場合にもいえる．

この主張を $\mathfrak{m}$ から $\mathfrak{m}+1$ への推論によって示す．つまり，この主張が $\mathfrak{m}$ まで正しいことが示されたと仮定して，$\mathfrak{m}+1$ でも正しいことを示したいわけである．

このために，まず，$\mathfrak{m}$-列を形成する $(\mathfrak{m}-1)$-列に対して，命題 (1), (2) が成

り立っていれば，これから $\mathfrak{m}$-列に対する命題 (1) が帰結できることに注意する．このことが主張 (3) で間接的に用いられて，そこで $\mathfrak{m}$-列のインデックスが他の $\mathfrak{m}$-列のインデックスより "大きい" かどうかを問題にすることができるようになる．

次に，主張 (2) が $(\mathfrak{m}+1)$-列を構成する $\mathfrak{m}$-列の連なりに対しても成り立つことを示したい．この際に (3) が $\mathfrak{m}$-列に対して成り立っているという仮定を用いる．

今，$(\mathfrak{m}+1)$-列の中に続けて現れる 2 つの $\mathfrak{m}$-列を考える．最初の $\mathfrak{m}$-列を

$$\mathfrak{G}_i,\ \mathfrak{G}_{i+1}, \ldots,\ \mathfrak{G}_{i+p-1} \qquad (p \geq 1)$$

とする．2 番目のものは，$\mathfrak{G}_{i+p}$ から始まるものとする．$\mathfrak{G}_i$ は $\mathfrak{G}_0$ であるか，または特徴的な数 $\geq \mathfrak{m}$ を持ち，$\mathfrak{G}_{i+p}$ は特徴的な数 $\mathfrak{m}$ を持つ．これに対し，$\mathfrak{G}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{G}_{i+p-1}$ はそれより小さな特徴的な数を持っている．このことから，$\mathfrak{G}_i$ で現れる例証置換はどれも $\mathfrak{G}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{G}_{i+p}$ で取り消されないことがわかる．特に，$\mathfrak{G}_{i+p}$ は $\mathfrak{G}_i$ 上で進歩的である．したがって，補助定理 3 により，$\mathfrak{G}_{i+p}$ は $\mathfrak{G}_i$ より小さいインデックスを持っているか，あるいは，この 2 のインデックスは等しく，$\mathfrak{G}_{i+p}$ には全置換 $\mathfrak{G}_{i+p+1}$ で $\mathfrak{G}_{i+1}$ 上で進歩的であり，$\mathfrak{G}_{i+i}$ と同じ特徴的な数を持つものが続いている（ここでの 2 番目の場合には，$p=1$ はあり得ない: もしこれが成り立っていたとすると，$\mathfrak{G}_{i+p}$ は $\mathfrak{G}_i$ に直接に続く全置換となってしまい，これは $\mathfrak{G}_i$ 上で進歩的だから，$\mathfrak{G}_i$ より小さなインデックスを持たなければならなくなってしまうからである）．したがって，$\mathfrak{G}_{i+p+1}$ は $\mathfrak{G}_{i+p}$ で始まる $\mathfrak{m}$-列に属していることになる．

ここでの 2 番目の場合をさらに調べてみる．全置換 $\mathfrak{G}_{i+p+1}$ は $\mathfrak{G}_{i+1}$ 上で進歩的なわけだが，これは $\mathfrak{G}_{i+1}$ より小さなインデックスを持っているか，あるいは，これらのインデックスは等しくなっているかのどちらかとなり，後者の場合には，$\mathfrak{G}_{i+p+1}$ には，$\mathfrak{G}_{i+2}$ 上で進歩的で，$\mathfrak{G}_{i+2}$ でと同じ特徴的な数を持ち，$\mathfrak{G}_{i+2}$ でと同じものを新しい例証置換として持つような全置換 $\mathfrak{G}_{i+p+2}$ が続く．ここで，$\mathfrak{G}_{i+2}$ が全置換 $\mathfrak{G}_{i+p}$ となってることはありえない．そうだとすると，$\mathfrak{G}_{i+p+2}$ での新しい例証置換が $\mathfrak{G}_{i+p}$ でのものと同じになってしまうが，これは $\mathfrak{G}_{i+p+1}$ で取り消されない（この全置換の特徴的な数は $\mathfrak{G}_{i+p}$ の特徴的な数より大きくないだけでなく，真に小さくすらなるからである）．したがって，$\mathfrak{G}_{i+p+2}$ では，これが新しい例証置換として現れることができなくなっ

てしまうからである．したがって，$p > 2$ が成り立っていて，$\mathfrak{G}_{i+2}$ は，まだ最初の $\mathfrak{m}$-列に属しており，$\mathfrak{G}_{i+p+2}$ もまだ2番目の $\mathfrak{m}$-列に属している．最後に考察した場合では，$\mathfrak{G}_{i+p+2}$ は $\mathfrak{G}_{i+2}$ 上で進歩的となっているから，前と同じ推論を再び繰り返すことができる．これにより，2つの $\mathfrak{m}$-列

$$\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_{i+1}, \ldots$$
$$\mathfrak{G}_{i+p}, \mathfrak{G}_{i+p+1}, \ldots$$

において，全置換 $\mathfrak{G}_{i+r}$ でこれに対応する2番目の $\mathfrak{m}$-列での全置換 $\mathfrak{G}_{i+p+r}$ のインデックスがこれのものより小さくなるものに行き着くまで，$\mathfrak{G}_{i+j}$ と $\mathfrak{G}_{i+p+j}$ のインデックスと特徴的な数，および，この全置換から求められる例証置換は全て等しくなる．遅くとも $\mathfrak{G}_{i+p-1}$ において対応する2番目の $\mathfrak{m}$-列の全置換のインデックスはこれのインデックスより小さくなる．つまり，$\mathfrak{G}_{i+r}$ は全置換 $\mathfrak{G}_{i+p}$ ではありえない: なぜなら，この全置換が，$\mathfrak{G}_{i+2p}$ に対応するとるすと，この全置換で $\mathfrak{G}_{i+p-1}$ から $\mathfrak{G}_{i+p}$ に移行する際の例証置換が再び導入されなければならないが，この例証置換は2番目の $\mathfrak{m}$-列で常に保存されているので，これは不可能だからである．したがって，次の可能性が考えられることになる: $\mathfrak{G}_i$ は $\mathfrak{G}_{i+p}$ より大きなインデックスを持つか，または，両方の隣り合った $\mathfrak{m}$-列は，それぞれ

$$\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{G}_{i+r}$$
$$\mathfrak{G}_{i+p}, \mathfrak{G}_{i+p+1}, \ldots, \mathfrak{G}_{i+p+r}$$

と始まっていて，$\mathfrak{G}_{i+r}$ は $\mathfrak{G}_{i+p+r}$ より大きなインデックスを持ち，$r < p$ で，$0 \leq j < r$ に対しては $\mathfrak{G}_{i+j}$ のインデックスは $\mathfrak{G}_{i+p+j}$ のそれと等しくなり，$\mathfrak{G}_{i+j}$ の特徴的な数も $\mathfrak{G}_{i+p+j}$ のそれと等しくなる．

主張 (3) が $\mathfrak{m}$ に対し成立していることから，ここでの両方の場合において，隣り合った $\mathfrak{m}$-列のうち最初のものの方が2番目のものより大きいインデックスをもつことがわかる．これにより $\mathfrak{m}+1$ に対する主張 (2) が確かめられ，同時に，$(\mathfrak{m}+1)$-列に対する図式は 0-ω-図式となることもわかる．

あとは，主張 (3) が $\mathfrak{m}+1$ においても正しいことを示せばよい．これは，両方の $(\mathfrak{m}+1)$-列の $\mathfrak{m}$-列への分割を考察することにより遂行される．つまり，$\mathfrak{G}_i$ が $\mathfrak{G}_{i+p}$ より大きなインデックスを持っているときには[31]，$\mathfrak{m}$ に対して (3) が

[31] ここでは，主張 (3) の記述を $(\mathfrak{m}+1)$-列に対して適用したときについて考えている．

正しいことから，最初の $(\mathfrak{m}+1)$-列を $\mathfrak{m}$-列に分割したときの最初の $\mathfrak{m}$-列は 2 番目の $(\mathfrak{m}+1)$-列の分割でのそれより大きなインデックスを持つことになる．他の場合には，特徴的な数の ($1 \leq j \leq r$ における) $\mathfrak{G}_{i+j}$ と $\mathfrak{G}_{i+p+j}$ での一致から，これらの $(\mathfrak{m}+1)$-列の $\mathfrak{m}$-列への分割は，$\mathfrak{G}_{i+r}$ あるいは $\mathfrak{G}_{i+p+r}$ まで完全に対応するものとなる．さらに，全置換のインデックスに対する仮定により，$\mathfrak{m}$-列に対して (3) が成り立っていることから，全置換 $\mathfrak{G}_{i+r}$ を含んでいる最初の $(\mathfrak{m}+1)$-列の中の $\mathfrak{m}$-列は他方の $(\mathfrak{m}+1)$-列の中の対応する $\mathfrak{m}$-列より大きなインデックスを持つことがわかる．一方，インデックスの構成のされ方から，2 つの $(\mathfrak{m}+1)$-列でこれより前の $\mathfrak{m}$-列のうちで対応しているもののインデックスは互いに等しくなる．このことから，最初の $(\mathfrak{m}+1)$-列のインデックスの方が他のものより大きいことがわかる．

以上により，考察すべき全ての $\mathfrak{m}$ に対し，主張 (1), (2), (3) が正しいことが示せた．特に，このことから，全ての $(\mathfrak{m}+1)$-列での $\mathfrak{m}$-列の連なりは 0-ω-図式の下降列を成しており，したがって，全ての $(\mathfrak{m}+1)$-列はたかだか有限個の $\mathfrak{m}$-列しか含み得ないことがわかる．

したがって，前にすでに考察したように，全置換の逐次的な構成は有限回のステップの後に停止しなければならない，つまり，全ての問題点となる論理式が "真" に還元されるような全置換に至らなければならない．

注意．　アッカーマンはここで述べた彼の無矛盾証明を，必要となる全置換の数の評価を与えることによって，さらに拡張している．この評価は，基本タイプの数 g, 問題点となる論理式に現れる異なる ε-項の数 $\mathfrak{e}$, そこに現れる項の最大の "次数" $\mathfrak{m}$ という 3 つのパラメータに依存するものとなっている．ここに，項の次数は，数表記 0 と ε-項は次数 0 を持ち，$\mathfrak{a}'$ と $\delta(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ の次数より 1 つだけ大きい次数を持ち，$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ と $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ の次数の大きいものよりさらに 1 つだけ大きい次数を持つとして帰納的に定義される．

評価関数は，原始帰納的関数と，ある種の擬帰納的関数の組合せで得られる．ここでの，一般化された帰納（"超限帰納"）は，パラメータの値の降下の際に普通の自然数の順序ではなく，1 つのパラメータの値 $\mathfrak{p}$ に依存して決まる，それによって自然数が 0-ω-図式の $\mathfrak{p}$ に依存して決まるあるものより小さいものに順序同型に対応づけられるような，順序[32]によって行われる．この評価が，原

[32] この順序では，自然数の素因数分解による順序 $\underset{\mathfrak{n}}{<}$ （原書 II，373 ページ以降参照）では

始帰納的関数だけでは行えないことは，ゲーデルの第 2 不完全性定理により明らかである．もし評価が原始帰納的関数のみで行われうるとすれば，無矛盾証明は体系 (Z) で帰納的関数の枠組みによって，つまり (Z) 自身により形式化できてしまうからである．

ここでさらに注意しておく必要があるのは，体系 (Z) の基本関数に，他の計算可能な関数が，それに対する確証可能な公理とともに付け加えられた場合には，アッカーマンの評価に対して変更を施す必要が出てくるということである．形式的体系のこのような拡張に関しては，上で述べた無矛盾証明の最初[33]で，これがここでの無矛盾証明の何らの妨げにもならないことはすでに述べた．評価のこのような拡張に対する適合化は，基本的には難しいことではないが，付加された関数のおのおの（あるいは，少なくともこれらのうちで最も大きく増大するもの）を評価関数の帰納的定義で考慮せねばならず，項の次数の最大のものの定義も，内容に応じて変えなければならない．

また，ここで強調しておきたいのは，アッカーマンの無矛盾性証明により，ここで考察した体系に対する第 4 章 での，数論に対する拡張された ε-定理の帰結（そこでは，帰納法図式の制限された適応のみの許された体系のみに対して示されていた[34]) が全て成り立つようになるということである．

ここで，これらの定理をもう一度列挙して，アッカーマンの証明からこれらがいかにして帰結できるかを手短かに述べておく．

アッカーマンの証明から，ただちに次の結果が得られる:

1) 全ての導出可能な無変数論理式は,（算術的関数，数表記の間の等式，および真偽値関数の付値に関して）真の論理式となる．

このことからさらに:

2) 全ての束縛変数も論理式変数も持たないが，自由変数は持つような導出可能な論理式は確証可能となる．

このようなものから個体変数に数表記を代入して得られる論理式も，導出可能となり，したがって 1) により，真の論理式となるからである．

なく，自然数の 2 進法表示が用いられる．

[33]308 ページ参照．

[34]104–105 ページ参照．

3) 導出可能な論理式で

$$(E\mathfrak{x}_1)\ldots(E\mathfrak{x}_\mathfrak{r})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r})$$

という形をしており，$\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}$ がここに現れる変数の全てであるようなものについては，数表記 $\mathfrak{z}_1,\ldots,\mathfrak{z}_\mathfrak{r}$ で，$\mathfrak{A}(\mathfrak{z}_1,\ldots,\mathfrak{z}_\mathfrak{r})$ が真の論理式となっているようなものを求めることができる．

なぜなら，このような論理式は，ε-論理式によって[35]，ある ε-項 $\mathfrak{t}_1,\ldots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}$ に対し，$\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_1,\ldots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r})$ という形の論理式に帰着できる．この論理式に対しても，ここで考察している体系の枠内で導出が得られるが，この導出から，アッカーマンの証明での準備段階での操作により，正規化された証明が得られる．これに対し，全置換の構成の手法を適用すると，おのおのの全置換では，項 $\mathfrak{t}_1,,\ldots,\mathfrak{t}_\mathfrak{r}$ に代わってある数表記が現れることになる．これらの項が最終的な全置換では数表記 $\mathfrak{z}_1,\ldots,\mathfrak{z}_\mathfrak{r}$ で置き換えられているとしよう．この置き換えで，全ての問題点となる論理式が真の論理式に移行するのであるから，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{z}_1,\ldots,\mathfrak{z}_\mathfrak{r})$ の真の論理式からの推論図式による導出が得られたことになる．したがって，$\mathfrak{A}(\mathfrak{z}_1,\ldots,\mathfrak{z}_\mathfrak{r})$ も真である.,

4) 論理式

$$(\mathfrak{x}_1)\ldots(\mathfrak{x}_\mathfrak{r})(E\mathfrak{y}_1)\ldots(E\mathfrak{y}_\mathfrak{s})\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$$

で，$\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r},\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s}$ 以外には変数の現れないようなものが導出可能なとき，(変数 $\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{r}$ に代入されるべき）任意の数表記 $\mathfrak{k}_1,\ldots,\mathfrak{k}_\mathfrak{r}$ に対して，数表記 $\mathfrak{n}_1,\ldots,\mathfrak{n}_\mathfrak{s}$ で $\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1,\ldots,\mathfrak{k}_\mathfrak{r},\mathfrak{n}_1,\ldots,\mathfrak{n}_\mathfrak{s})$ が真の論理式となるようなもが求まる．

なぜなら，全ての数表記の $\mathfrak{r}$-組 $\mathfrak{k}_1,\ldots,\mathfrak{k}_\mathfrak{r}$ に対して，ここで考察している論理式の導出から，論理式 $\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1,\ldots,\mathfrak{k}_\mathfrak{r},\mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_\mathfrak{s})$ の導出が得られるから，4) は，定理 3) から帰結できる．

3) と 4) で述べた存在定理は，構成的な意味でも成り立っている．

これらの主張は，形式的体系 (Z) に ε-公理を加えたもので成り立のであるから，(Z) に ι-規則を加えたもの，および形式的体系 (Z_μ), あるいは (Z) に帰納的定義を加えたものでも成り立つ．これらの拡張で ι-記号の除去可能性の定理[36]を用いる必要はない．確証可能な論理式を，場合によっては計算可能な

---

[35] 69–71 ページ参照.

[36] 原書 I, 431–432 ページ参照.

関数とともに初式として加えることによって得られる拡張に対しても，この主張は成り立つ.

帰結 3) については，特に次の応用についても述べておきたい: $\mathfrak{A}(m)$ が帰納的論理式で m がそこでの唯一の変数であり，全ての数表記 $\mathfrak{z}$ に対し $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ が導出可能なら，論理式 $(Ex)\overline{\mathfrak{A}(x)}$ も導出可能となり，したがって，論理式 $\overline{(x)}\mathfrak{A}(x)$ は導出可能ではありえない.

そうでないとすれば，帰結 3) により，ある数表記 $\mathfrak{z}_1$ で $\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{z}_1)}$ が真の論理式となり，したがって，$\mathfrak{A}(\mathfrak{z}_1)$ が真の論理式でなけらばならないからである.

したがって，ここで考察している体系では，少なくとも帰納的論理式に関しては，ω-無矛盾性が成り立っている. したがって，このような体系に対しては，帰納的論理式であったところの，ゲーデルの導出不可能性定理[37]での論理式 $\overline{\mathfrak{B}(m, \mathfrak{q})}$ で，体系の中で導出可能でないが，任意の数表記 $\mathfrak{z}$ に対しては $\overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{q})}$ が導出可能となるようなものを構成することができることになる. 特に，このことから，論理式 $(x)\overline{\mathfrak{B}(x, \mathfrak{q})}$ も，これの否定も，この体系で導出できない. よって，ここで考察したようなどの体系にも形式的に決定不可能な論理式が存在することがわかる[38].

[37]原著 II，282 ページ下参照.

[38]訳注: J.B. Rosser により，現在では，このような性質を持つ論理式は，単に体系の無矛盾性だけを仮定して構成できることがわかっている.

訳者あとがき

本書は，ヒルベルト (D. HILBERT)，ベルナイス (P. BERNAYS) 著，Grundlagen der Mathematik I, II 第 2 版 (1934/1968, 1939/1970) の抄訳である．原書は 2 巻で 1,000 ページにも及ぶ大著であるため，故前原昭二教授の意図により，現代の日本の読者に特に必要と思われる部分のみを訳出した．訳出した部分と本書の内容は以下のように対応している．

原書 I の §1	第 1 章
原書 II の補足 I	第 2 章
原書 II の §1〜§3	第 3 章〜第 5 章
原書 II の補足 V	第 6 章

原書には，ここに訳出したもの以外にも，ゲーデルの第 2 不完全性定理の詳しい解説などが含まれているが，大部のため，今回は全て割愛せざるを得なかった．しかし，読者は，訳出した部分により，原著で述べられている，ヒルベルトの“有限の立場からの (vom finiten Standpunkt) 証明論”の概観を得ることができるものと思う．

原書の第 1 版が執筆されたのは，ゲーデルの不完全性定理が発表され，これによって，有限の立場から自然数論，さらには全数学の無矛盾性を証明する，という“ヒルベルトのプログラム”実行が，そのままの形では理論的に実行不可能であることが明らかになった直後であり，この結果のヒルベルト学派に与えた衝撃は，本書の初めに訳出した，原書 I のヒルベルト自身による序文にも見てとることができる．しかし，ゲーデルの不完全性定理は，自然数論の無矛盾性証明のためには,「有限の立場を，初等的体系の考察において用いられたものにより，さらに強いものとしなければならない，というこ

とを示しているにすぎない」と，そこで述べられているように，ある意味でまだ有限的と見ることのできる[1]，カントルの最初の ε-数までの超限帰納法を認める立場にまで有限の立場を強めることで，自然数論の無矛盾性の証明が可能となることが知られている．原書でも，そのような無矛盾証明として，ゲンツェン，カルマー，アッカーマンによる証明が挙げられているが，本書の第 6 章（原書 II，補足 V）では，このうち，カルマー，およびアッカーマンのものが細論されている．特に，アッカーマンによる証明は，ヒルベルトの証明方針の自然な拡張によるもので，これにより，数論に関しては，上のような制限つきではあるが，ヒルベルトの考えていたような彼のプログラムの成就を見たということができるであろう．

本書に訳出された部分の内容は，以下のようになっている．第 1 章（原書 I，§1）は，形式的体系，その無矛盾性証明，数学における無限の役割等に関する準備的な議論である．第 2 章（原書 II，補足 I）では，後で必要となる，原書 I での結果の要約が述べられている．本書で訳出した部分が仮定している知識は，数理論理学のごく基礎的な事項のみであるので，数理論理学の初歩を多少でも学んだことのある読者は，いずれにしても以下の章を問題なく読み下すことができると思う．第 3 章～第 5 章（原書 II，§1～§3）では，数論の部分体系の有限の立場での無矛盾性証明，エルブランの定理とその応用，等が述べられている．ここでの結果は，第 3 章（原書 II，§1）で導入されるヒルベルトの ε-記号の理論を介して議論されるが，このことが本書の大きな特徴となっている．第 6 章（原書 II，補足 V）では先に述べた数論の無矛盾証明が述べられている．

なお，翻訳にあたっては，原書の歴史的意味を考慮して，できるだけ原書の用語に従った．特に，原書は古いドイツ語のスタイルで書かれているため，各センテンスの息が非常に長く，日本語への翻訳が大変に困難な部分もあったが，意味が全く不明になってしまう場合を除いて，極端な意訳は避けるよう心がけた．

日本語の表記に関しては，最終的には渕野の方針に従って統一してある．

本書で，初めて数理論理学を学ぶことになる読者は，現代的な視点から書かれた数理論理学の教科書と併読するのがよいであろう[2]．

ヒルベルトのプログラムと，その方法論は，証明論自身のその後の発展以

---

[1] この点に関する解説は，GAISHI TAKEUTI: Proof Theory, second edition, Northholland (1987) 1 にある．

[2] 例えば，H.-D. EBBINGHAUS, J. FLUM, W. THOMAS: Einführng in die mathematische

外にも，逆数学の理論や，自動証明に関する最近の研究により，現代において，新しい意味を持つに至っていると言えるであろう．“逆数学” (Reverse mathematics) の理論では，実際の数学での議論が，どのような形式的体系の枠組みの中で既に行われているのか，ということについての分析がなされ，この観点から数論の体系を拡張した，いくつかの形式体系の無矛盾性に関する強さの比較が議論されることになるのだが，そこでの問題意識は，ヒルベルトのプログラムの思想の延長線上で捉えることのできるものである[3]．一方，自動証明に関する研究では,「計算規則の与えられた関数が存在する」，という有限の立場での関数の存在性を，多くの局面において,「(ほとんどの場合)多項式時間で計算できる関数が存在する」，という存在性で置き換えなくてはならなくなることで，有限の立場よりさらに制限された立場を考えなくてはならなくなる．

このような，現代の文脈から，当時の，ヒルベルトの証明論がどのようなものだったかを，点検しなおしてみることは，数学史からの興味を別としても，意義のあることと思うものである．

なお，ヒルベルトの思想には哲学的にも含蓄の深いものがあるのに，このことに注目している人がそう多くないように思われるのは訳者のうらみとするところであった．この訳書をひもといた方が，この含蓄にもふれていただければ幸いである．

翻訳にあたっては，シュプリンガー・フェアラーク東京のスタッフの方々にはいろいろと便宜をはかっていただいた．ここに感謝の意を表したい．

最初に述べたように，本訳書の企画は，故前原昭二教授によるもので，本来，本書は我々 3 人の共訳になるはずであったが，翻訳の作業が進まないうちに亡くなられた．抄訳の範囲は，前原教授の生前に指定されたものをほぼ継承するものとなったが，翻訳を終えて，ヒルベルトのプログラムの概要とその意味が浮き彫りになるような，考え抜かれた選択であったことに気づい

Logik, Wissenschaftliche Buchgeselschaft, Darmstadt (1978) あるいは，これの英訳：Mathematical Logic, Springer-Verlag. この本での議論は，本書に比べて，ずっと意味論的な見方に重点を置いたものになっている．また，J.R. Shoenfield: Mathematical Logic, Addison-Wesley (1967) は，記法など，いささか古くなった感があるが，数理論理学の全体に関しての，バランスのとれた，しっかりした記述がなされている本格的な教科書である．

[3] S.G. Simpson, Partial realizations of Hilbert's program, *J. Symb. Logic*, **53**, 349–363 (1988) 参照．なお，逆数学については，田中一之氏による大変優れた解説が，数学, Vol.42, No.3, 244–260 にある．

た次第である．ご冥福をお祈りしたい．

1993 年 7 月

吉田夏彦

渕野　昌

復刻にあたって

「訳者あとがき」にもあるように，本書は D. HILBERT, P. BERNAYS: Grundlagen der Mathematik I, II の抄訳であり，翻訳の経緯についてもそこで述べた．ここでは復刻にあたって，いくつかの補足をしておきたいと思う．

本書で訳出されているのは第 I 巻の第 1 章を除くと，第 II 巻の（原書第 2 版のページ数で）1/2 弱くらいの部分である．第 I 巻は，現代の数理論理学の教科書でも標準的に扱われるような述語論理に関する基礎事項の説明にあてられている（§8 で扱われている ι-記号は，現代の論理学の教程で触れられることは少ないが，これは定数記号や関数記号の導入や消去に対応するものである）．

そこで，ここではまず訳出しなかった部分も含めた，第 II 巻の原書の全体の章立を見ておこうと思う．下線を引いた部分が本書で訳出した部分である:

上の表でも見てとれるように，本書で訳出したのは，第 II 巻のうち，主に ε-計算に関連する部分であり，訳出されていない部分には，ゲーデルの不完全

性定理の詳細な証明（不完全性定理の証明のゲーデルの論文で省かれていた細部の最初の子細な記述といわれている）とその意味の解説（§4～§5），計算可能性の理論と決定性問題（補足 II），2 階の算術での解析学の主要部分の展開（補足 IV），などが含まれている．

ε-計算は現代の標準的な数理論理学の教科書や教程で扱われることはほとんどない，と言ってよいので，これについて多少補足しておく必要があるように思える．そこで，以下に紙数の許す範囲で，これに関する補足説明をしておこうと思う．

そもそも ε-計算は，ヒルベルトが，数学の無矛盾性を有限の立場から確立する，という彼のプログラムにおいて，その遂行にあたっての主要方針 (Hilbertscher Ansatz：本書では“ヒルベルトの証明方針”という訳語をあてている）の要となる手法として導入されたものだった．本書の 6.2 で述べられているアッカーマンによる自然数論の無矛盾性証明は，このヒルベルトの証明方針を忠実になぞる形のものとなっており，その意味で，ヒルベルトの証明方針の正当性を立証する成果となっていると考えることができるであろう．このような証明は，もちろん，ゲーデルの不完全性定理により，狭義の有限の立場からの証明ではありえず，本書で「0-ω-図式」と呼ばれている ε_0 未満の可算順序数の有限的表現に関する帰納法が用いられている．この論法は，6.1 の後半でも論ぜられているように，まだある意味で十分に有限的な論法と看做すことが可能であり，その意味で，このような帰納法を厳格な意味での有限の立場での論法に加えて許すような枠組での無矛盾性証明の，ヒルベルトの証明論の意味での意義は十分にあるのだが，そうだとしても,「有限の立場からの証明」と何の付帯条件もなく言いきることのできるものではない．

ところが，1930 年頃にゲーデルの不完全性定理が現われるまで，ヒルベルトと彼の共同研究者たちは，ヒルベルトの証明方針にそって進むことで，純粋な有限の立場からの数学の無矛盾性証明が達成できることを強く確信していたようである．特に，初等数論の無矛盾性は，本書の 6.2 に収録されたアッカーマンによる無矛盾性証明のもともとの版では，証明の仮定が正しく評価されておらず，有限の立場からの証明となっていた．これは勿論ゲーデルの定理から正しい証明ではあり得ないわけであるが，この間違った主張がしばらくの間ヒルベルトのプログラムの成果として信じられており，たとえば，ヒルベルトが 1928 年に行なったボローニャの国際会議での講演では，数学の

基礎に関する研究課題は，1 階の数論の無矛盾性についてはすでに確立されていたという前提に立って論ぜられている．証明に修復不可能な欠陥があったことは，不完全性定理が 1930 年頃に出てくるまで全く気付かれず，どこが正しくなかったかについても，フォン・ノイマンによってしぼりこまれるまで，定かにならなかったようである（フォン・ノイマンによるこの考察は，本書の 4.4 f) に述べられている）．ゲーデルの不完全性定理の論文でも，アッカーマンのこの間違った無矛盾性証明のステータスがその執筆時点で明らかでなかったことが，非常に明快なゲーデルの筆を一瞬曇らせているようにも見える．

本書で，ε-計算や第 1，第 2 ε-定理の応用として述べられているものには，3.4 b) での初等幾何学の無矛盾性証明や，5.3 でのエルブランの定理の一般形があるが，これらは，現代の教科書で証明論的に扱われるときには，ゲンツェンの証明体系でのカット除去定理の応用として示されることが多い．

このうち，初等幾何の無矛盾性については，その無矛盾性を実数論の無矛盾性に帰着させるヒルベルトの 20 世紀初頭のころの証明が，その無矛盾性の証明と勘違いされていることが少なくないようである．また，幾何学者の間ではタルスキーの仕事の結果を幾何学の無矛盾性の証明として認識している方も多いようである．タルスキーの初等幾何の無矛盾性に関する定理は，形式的体系に関するものではあるが，ここで用いられる量化子除去定理の通常の証明はモデル理論を介して行われるので，そのままの形では有限の立場での無矛盾証明ではない．これに対して，本書の 3.4 b) で述べられている無矛盾性証明は純粋に有限の立場からの無矛盾証明である．

エルブランの定理については，エルブランの原論文での証明には欠陥があったことが後になって明らかになっているので，歴史的には，エルブランの定理は，本書（の原著）によって，最初の正しい証明を与えられている．

本書の翻訳を発案された故前原昭二先生自身が ε-計算に関連した重要な研究をされていたこともあり[4]，様々な形式的体系における ε-計算に関連する研究が，50 年代から 70 年代にかけての日本でさかんに行われていた．ε-定理のアイデアは，証明論の最近の研究においても重要な役割をはたすことが

[4] S. MAEHARA: The predicate calculus with ε-symbol, *J. Math. Soc. of Japan*, **7**, 323–344 (1955) ではゲンツェンの基本定理の応用としての第 2 ε-定理の証明が述べられており，S. MAEHARA: Equality axiom on Hilbert's ε-symbol, *J. Faculty of Sci. Univ. Tokyo*, **I**, **7**, 419–435 (1957) では ε-項の同等公理を付け加えた体系でも ε-定理が成立することが示されている．

ある．

また，ε-項は「…を満たすところのもの」という意味を持つものとして解釈できるわけであるが，このような解釈との関連で，言語学の形式的意味論や言語哲学において ε-計算が応用される．

ε-計算のさらに詳しい事柄については J. Avigad と R. Zach によるインターネット上の辞典の項目[5]とそこで述べらている文献を参照されたい．また RICHARD ZACH: The practice of finitism: Epsilon calculus and consistency proofs in Hilbert's Program, *Synthese*, **137**, 211–259 (2003) にはヒルベルト学派における有限の立場からの無矛盾性証明や，そこでの ε-計算の役割などに関する考察が述べられている．

数学の基礎あるいは証明論に関する最近の動向については，332 ページの脚注で述べた G. TAKEUTI: Proof Theory の第 2 版の付録や，S. BUSS(ed.): The Handbook of Proof Theory, Elsevier (1998)，新井敏康：竹内の基本予想について，数学，Vol.40, 322–337 (1988)，同：Hilbert の第 2 問題に関する証明論の展開，数学，Vol.57, 113–126 (2005) なども参考になるだろう．

2007 年 3 月

吉田夏彦

渕野　昌

[5] JEREMY AVIGAD, RICHARD ZACH: The Epsilon Calculus, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2002 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), URL: http://plato.stanford.edu/archives/sum2002/entries/epsilon-calculus

索　引

【人名索引】

【項目索引】

■あ

■か

■さ

■た

■な

■は

■ま

■や

■ら

【著者】
D. ヒルベルト
David Hilbert, 1862-1943
P. ベルナイス
Paul Bernays, 1888-1977
【訳者】
吉田 夏彦（よしだ なつひこ）
東京工業大学名誉教授
渕野 昌（ふちの さかえ）
中部大学工学部理学教室教授

シュプリンガー数学クラシックス 第4巻
数学の基礎

平成24年3月30日 発 行

訳 者 吉 田 夏 彦
渕 野 昌

編 集 シュプリンガー・ジャパン株式会社

発行者 池 田 和 博

発行所 丸善出版株式会社
〒101-0051 東京都千代田区神田神保町二丁目17番
編集：電話(03)3512-3263／FAX(03)3512-3272
営業：電話(03)3512-3256／FAX(03)3512-3270
http://pub.maruzen.co.jp/

印刷・株式会社 平河工業社／製本・株式会社 松岳社

ISBN 978-4-621-06405-4 C3041 Printed in Japan

本書は，1993年10月にシュプリンガー・ジャパン株式会社より
出版された同名書籍を再出版したものです.

Springer

シュプリンガー現代数学シリーズ

1	量子群とヤン・バクスター方程式	●神保道夫著	ISBN978-4-431-70594-9	本体3,690円
2	モザイクと３次元多様体	●J.M.モンテシーノス著　前田亨訳	ISBN978-4-431-70628-1	品 切
3	エルゴード理論とフラクタル	●釜江哲朗／高橋智著	ISBN978-4-431-70645-8	本体5,728円
4	超幾何関数論	●青本和彦／喜多通武著	ISBN978-4-431-70662-5	本体6,408円
5	可換代数と組合せ論	●日比孝之著	ISBN978-4-431-70664-9	品 切
6	D加群と代数群	●谷崎俊之／堀田良之著	ISBN978-4-431-70682-3	本体5,049円
7	ゲージ理論とトポロジー	●深谷賢治著	ISBN978-4-431-70668-7	本体6,020円
8	特異点入門	●石井志保子著	ISBN978-4-431-70730-1	本体4,700円
9	球面上の代数的組合せ理論	●坂内英一／坂内悦子著	ISBN978-4-431-70771-4	本体4,800円
10	ファインマン経路積分の数学的方法 －時間分割近似法－	●藤原大輔著	ISBN978-4-431-70748-6	本体4,700円
11 12	ミクロからマクロへ　１，２	●舟木直久／内山耕平著		
	１．界面モデルの数理		ISBN978-4-431-70844-5	本体4,500円
	２．格子気体の流体力学極限		ISBN978-4-431-70965-7	本体4,700円
13	多体シュレーディンガー方程式	●磯崎洋著	ISBN978-4-431-71091-2	本体5,800円